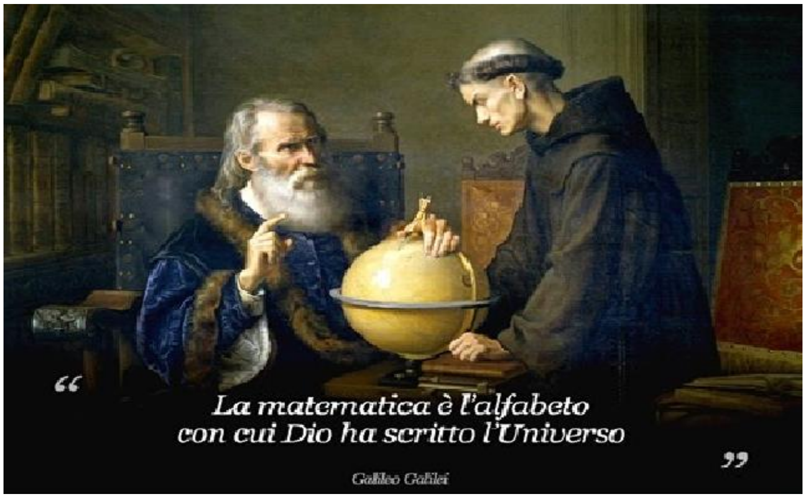
Gazeta electronică Mate.Info.Ro: "Fiecare punct.. contează"
ISSN: 2457 - 161X
ISSN-L: 2457 - 161X

Inteligenţa naturii

V-aţi întrebat vreodată de ce fagurii de miere au formă regulată ? Inteligenţa naturii a fost remarcată şi discutată de matematicieni (şi nu numai) încă din antichitate.



Ştiaţi că dintre toate hexagoanele cu acelaşi perimetru , hexagonul regulat are arie maximă ?

*Dintre toate **poligoanele** cu **acelaşi perimetru , poligoanele regulate** au **aria maximă !***
*Figurile geometrice plane , cu acelaşi perimetru sunt denumite în matematică **izoperimetrice.***

Una dintre probleme de geometrie , legate de practică ale oamenilor a fost cea a aflării figurilor plane cu arie maximă dintre cele cu acelaşi perimetru.

*Se zice că unul dintre cei care s-ar fi ocupat de această problemă ar fi fost Pitagora ; el a ajuns la concluzia că dintre toate figurile geometrice plane cu acelaşi perimetru (izoperimetrice) , aria cea mai mare o are cercul ,iar dintre toate corpurile cu aceeaşi arie totală exterioară , cel mai mare volum îl are sfera , fapt pentru care acestea erau numite **perfecte**.*

Şi matematicianul grec Zenodor s-a ocupat de problema izoperimetricelor; el a căutat să întoarcă lumea de la convingerea că perimetre egale închid arii egale.
Pappus în cartea a V-a a ''Colecţiunilor'' sale se ocupă de problema '' celulelor albinelor'' referindu-se la forma lor hexagonală.

Ne propunem să le remarcăm printre figurile geometrice plane cu acelaşi perimetru (izoperimetrice) pe acelea care au ariile maxime.

ISSN: 2457 - 161X
ISSN-L: 2457 - 161X

Alte considerații istorice asupra „ izoperimetricelor”:

$\boxed{\textbf{O1}}$. *În 1827, Jacob Steiner (1796–1863) a demonstrat pentru prima oară teorema următoare:*
„Dintre toate figurile plane, convexe, izoperimetrice (adică care au aceeaşi lungime) aria maximă este realizată de cerc”.
$\boxed{\textbf{O2}}$. *În 1916, Blaschke Wilhelm (1885-1961) demonstrează următoarea teoremă:*
„Pentru orice curbă plană, închisă, de lungime L şi arie A avem $4\pi A \le L^2$. $4\pi A = L^2 \Leftrightarrow$ curba este un cerc”.
Inegalitatea $4\pi S \le L^2$ poarta numele de inegalitatea izoperimetrică.
$\boxed{\textbf{O3}}$. *În 1921, Carleman Torsten (1892-1949) a demonstrat inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafeţe minimale.*
$\boxed{\textbf{O4}}$. *În 1933, E.F.Beckenbach şi F.Radó demonstrează inegalitatea izoperimetrică pentru curbe pe suprafeţe de curbură gaussiană negativă.*

Consecinţe ale inegalităţii izoperimetrice:

$\boxed{C1}$. ***Dintre toate triunghiurile izoperimetrice (care au acelaşi perimetru) aria maximă o are triunghiul echilateral*** *(Zenodor, sec.2 î.Hr.).*
Demonstraţie: *Se va ţine cont de următoarea propoziţie:*

℗ „ Dacă factorii unui produs au suma constantă, atunci produsul lor este maxim dacă factorii sunt egali”. Avem S = $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, *aria triunghiului şi a+b+c = const.*

(din ipoteză), p = $\dfrac{(a+b+c)}{2}$ *= const; a, b, c- variabile.*

S este maximă ⇔S^2 este maximă ⇔produsul $(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$ *cu suma factorilor constantă este maxim ⇒p-a = p-b = p-c ⇒a = b = c (q.e.d.).*

$\boxed{C2}$. *Dintre toate patrulaterele inscriptibile, izoperimetrice, aria maximă o are pătratul* ***(Zenodor).***

Demonstraţie: *Considerăm patrulaterul inscriptibil de laturi a, b, c, d. Din ipoteză, a+b+c+d = const. Aria patrulaterului inscriptibil, este dată de formula: S =* $\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, *unde p =* $\dfrac{(a+b+c+d)}{2}$ *= const. Avem suma: (p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d) constantă, şi din propoziţia ℗ ⇒p-a = p-b = p-c = p-d ⇒a=b=c=d (q.e.d.).*

ISSN: 2457 - 161X
ISSN-L: 2457 - 161X

C3. *Un poligon de laturi date, are aria maximă, dacă este inscriptibil.* *(enunţată de Christian Huygens (1629-1695) în 1675 şi demonstrată de Gabriel Cramer (1704-1752) în 1752).*

Demonstraţie: *Fie două poligoane P şi P' formate cu aceleaşi laturi, cu P înscris într-un cerc şi P' neinscriptibil. Pe laturile poligonului P' purtăm exterior segmente de cerc, corespunzătoare laturilor poligonului P. Obţinem astfel o linie curbă (C') izoperimetrică cu (C). Din inegalitatea izoperimetrică avem Aria (C) > Aria (C') .*

Aria (C) = Aria (P) + Aria (segm. de cerc) >Aria (P') + Aria (segm. de cerc)= Aria (C')

Deci Aria (P) > Aria (P') (q.e.d.).

C4. *Dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi, poligonul regulat are aria maximă.* *(Zenodor)*

Demonstraţie:

Vom face demonstraţia în două părţi :

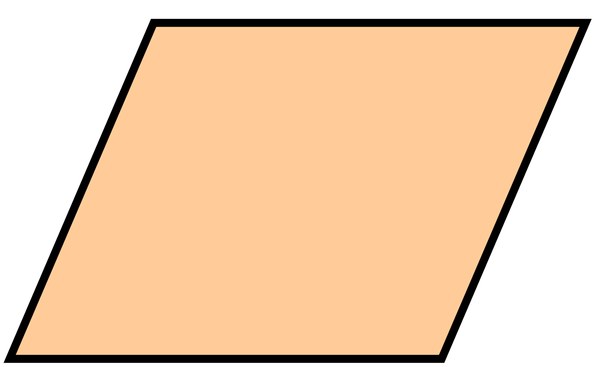
1.Dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi , cel de arie maximă trebuie să aibă laturi egale.

Demonstraţie. Să notăm cu $P = M_1M_2...M_n$ *poligonul în cauză. Presupunem că nu are toate laturile egale. Atunci există două laturi succesive care nu sunt egale. Fără a reduce generalitatea, putem presupune că acestea sunt* M_1M_2 *şi* M_2M_3. *Fie* $l = M_1M_2 + M_2M_3$. *Locul geometric al punctelor M cu proprietatea că* $M_1M + MM_3 = l$ *este o elipsă cu focarele* M_1 *şi* M_3. *Dacă înlocuim* M_2 *cu oricare din punctele de pe elipsă, perimetrul noului poligon* $M_1MM_3...M_n$ *rămâne acelaşi. Dacă înlocuim* M_2 *cu punctul M* situat pe elipsă în afara poligonului* $M_1M_3...M_n$ *şi care are proprietatea că triunghiul* $M_1M^*M_3$ *este isoscel, atunci aria noului poligon* $M_1M^*M_3...M_n$ *va fi strict mai mare ca aria poligonului iniţial, deoarece aria triunghiului* $M_1M_2M_3$ *este strict mai mică decât aria lui* $M_1M^*M_3$. *Aşadar poligonul nu poate fi de arie maximă.*

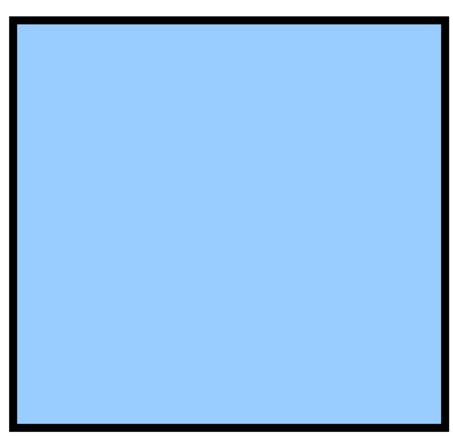
Remarcă.

Rombul cu latura a şi pătratul ca latura a au arii diferite !

a

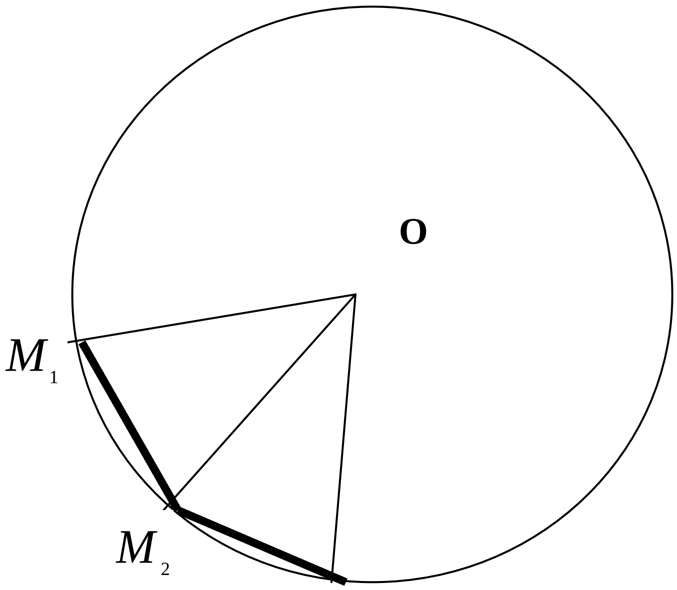


a



ISSN: 2457 - 161X
ISSN-L: 2457 - 161X

2. Dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi , cel de arie maximă trebuie să aibă unghiuri egale.
Cu demonstraţia precedentă am arătat că dintre toate poligoanele izoperimetrice cu acelaşi număr de laturi , cel de arie maximă trebuie să aibă laturi egale şi pentru că trebuie să fie şi inscriptibil
(conform $\boxed{C3}$.) înseamnă că există O centru al cercului circumscris poligonului cu n laturi egale.



Pentru că la arce egale corespund unghiuri egale ,triunghiurile $OM_1M_2, OM_2M_3,$ OM_3M_4 ..., $OM_{n-1}M_n$ *sunt congruente după cazul L.L.L. , deci vor avea şi unghiuri congruente .Atunci unghiurile poligonului $M_1M_2 \ldots M_n$ sunt congruente.*
Drept consecință poligonului $M_1M_2 \ldots M_n$ are laturile congruente şi unghiurile congruente, deci este poligon regulat.

Prof. Popescu Marilena/Şcoala 27 Principesa Ileana