

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 2015$.
- 5p 2. Determinați valoarea maximă a funcției $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 8x) = \log_3 9$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ și $C(4,0)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB = 1$, $B = \frac{\pi}{3}$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricile $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Determinați numerele reale a , știind că $A^2(a) - 2A(a) + I_3 = O_3$, unde $A^2(a) = A(a)A(a)$.
- 5p c) Arătați că $A(2) + A(4) + A(6) + \dots + A(100) = 50A(51)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + mX + 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(0) = 2$.
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care $x_1 = x_2 + x_3$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p c) Pentru $m = 8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $e^x(x-3)^2 \leq 4e$, pentru orice $x \in (-\infty, 3]$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x^3)^n dx$.
- 5p a) Arătați că $I_1 = \frac{3}{4}$.
- 5p b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n .
- 5p c) Demonstrați că $I_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3n+4} I_n$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_2 - a_1 = 2015 - 1 =$ $= 2014$	3p 2p
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4) =$ $= 4 + 1 = 5$	3p 2p
3.	$x^2 - 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$ $x_1 = -1$ și $x_2 = 9$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Prima cifră se poate alege în 4 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 3 moduri Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 2 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ de numere	2p 3p
5.	$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 1$ $y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 0$	3p 2p
6.	$A = \frac{\pi}{2}$ $BC = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 + 4a + 2 \\ 0 & 1 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 2A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 2a + 2 \\ 0 & 2 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2(a) - 2A(a) + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2 \text{ și } a_2 = 0$	2p 1p 2p
c)	$A(2) + A(100) = 2A(51), A(4) + A(98) = 2A(51), \dots, A(50) + A(52) = 2A(51)$ $A(2) + A(4) + A(6) + \dots + A(100) = 25 \cdot 2A(51) = 50A(51)$	3p 2p

2.a)	$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + m \cdot 0 + 2 =$ $= 2$	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 4, x_1 = x_2 + x_3 \Leftrightarrow x_1 = 2$ $f(2) = 0 \Leftrightarrow 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$	2p 3p
c)	$f = X^3 - 4X^2 + 8X + 2, x_1 + x_2 + x_3 = 4$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 8$ Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 16 - 16 = 0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, contradicție cu $f(0) = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(x^2 - 6x + 9) + e^x(2x - 6) =$ $= e^x(x^2 - 6x + 9 + 2x - 6) = e^x(x^2 - 4x + 3), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 1]$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, 3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, 3]$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3, +\infty)$	2p 1p 1p 1p
c)	$f(x) \leq f(1)$, pentru orice $x \in (-\infty, 3]$ Cum $f(1) = 4e$, obținem $e^x(x-3)^2 \leq 4e$, pentru orice $x \in (-\infty, 3]$	3p 2p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 (1-x^3) dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right) \Big _0^1 =$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (-x^3)(1-x^3)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x \in [0, 1]$ avem $-x^3 \leq 0$ și $(1-x^3)^n \geq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$	2p 3p
c)	$I_{n+1} = \int_0^1 x'(1-x^3)^{n+1} dx = x(1-x^3)^{n+1} \Big _0^1 - \int_0^1 x(n+1)(1-x^3)^n (-3x^2) dx =$ $= 3(n+1) \int_0^1 x^3(1-x^3)^n dx = -3(n+1) \int_0^1 (1-x^3-1)(1-x^3)^n dx = -3(n+1)(I_{n+1} - I_n)$, deci $I_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3n+4} I_n$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p