Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ și $z_2 = 3 - i$. Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.
5p	**2.** Determinaţi numărul real a, știind că punctul $A(1,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(2,a)$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x) = \cos\dfrac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right) = 4$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, știind că $A(1) + A(3) = a\,A(2)$.
5p	**c)** Arătați că $A(x)A(y) = 2A(x+y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.
5p	**a)** Arătați că $2 * (-2) = -2$.
5p	**b)** Arătați că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = (x+2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + 1\right) f(x)\,dx = 0$.
5p	**b)** Arătați că $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{1}{2} + \ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real m, $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 z_2 = (3+i)(3-i) = 9 - i^2 =$	**3p**
	$=10$, care este număr real	**2p**
2.	$f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + a = 1$	**3p**
	$a = 0$	**2p**
3.	$x^3 + 2x - 4 = x^3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 80 de elemente, deci sunt 80 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 11 numere divizibile cu 7, deci sunt 11 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{11}{80}$	**2p**
5.	$m_{OA} = 2$ și $m_{OB} = \frac{a}{2}$	**2p**
	$m_{OA} = m_{OB} \Leftrightarrow a = 4$	**3p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} =$	**2p**
	$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 =$	**3p**
	$= 4 - 0 = 4$	**2p**
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 2$	**2p**
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 4 + xy & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 4 + xy \end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(x+y) + xyI_2 = 2\begin{pmatrix} 2 & x+y \\ x+y & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + xy & 2(x+y) \\ 2(x+y) & 4 + xy \end{pmatrix} = A(x)A(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

2.a)	$2*(-2)=3\cdot 2\cdot(-2)+6\cdot 2+6\cdot(-2)+10=$	**3p**
	$=-12+12-12+10=-2$	**2p**
b)	$x*y=3xy+6x+6y+12-2=$	**2p**
	$=3x(y+2)+6(y+2)-2=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*x*x=9(x+2)^3-2$	**2p**
	$9(x+2)^3-2=x \Leftrightarrow x_1=-\frac{7}{3}$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{5}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=2x+1$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+3)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^2}{2}+\ln\left(x^2+1\right)\right)\Big\vert_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{0}^{m}\lvert g(x)\rvert dx=\int_{0}^{m}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_{0}^{m}=\ln\left(m^2+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(m^2+1\right)=\ln 2\Leftrightarrow m^2+1=2$ și, cum $m>0$, obținem $m=1$	**2p**