Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=2$ şi $a_2=5$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{4-x}=2^{2x+2}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 2.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Arătaţi că $\sin C=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.
5p	**b)** Arătaţi că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x, ştiind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $f(0)=m$.
5p	**b)** Pentru $m=1$, arătaţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul natural prim m, ştiind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.
5p	**b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=e$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=5-2=3$	**3p**
	$a_3=5+3=8$	**2p**
2.	$f(3)=5 \Leftrightarrow a-3=5$	**3p**
	$a=8$	**2p**
3.	$2^{3(4-x)}=2^{2x+2} \Leftrightarrow 12-3x=2x+2$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$y-y_M=2(x-x_M)$	**2p**
	$y=2x-1$	**3p**
6.	$13^2=5^2+12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A	**2p**
	$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy&0&(1-x)2y+2x(1+2y)\\0&1&0\\-x(1-y)-(1+2x)y&0&-2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1-(xy+x+y)&0&2(xy+x+y)\\0&1&0\\-(xy+x+y)&0&1+2(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^3-1\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x+1)^3-1=7 \Leftrightarrow x=1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$	**3p**
	$=0+0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f(x_1)=0\Leftrightarrow m=-x_1(x_1+1)^2$	**2p**
	Deoarece m este prim, obținem $(x_1+1)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$	**3p**
	$=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x)=-\dfrac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^e\dfrac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^e\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^e\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e x\cdot\dfrac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e-x\Big\vert_1^e=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^e\dfrac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln^n x\,dx=\dfrac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e=\dfrac{1}{n+1}$	**3p**
	$\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2015}\Leftrightarrow n=2014$	**2p**