Universitatea din Bucureşti **18.07.2015**
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2015
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră. Fie ecuaţia $(m+1)x^2-(2m+1)x-2m=0$, unde $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(a) Determinaţi rădăcinile reale ale ecuaţiei pentru $m=1$.
(b) Determinaţi valorile parametrului m astfel încât ecuaţia să aibă toate rădăcinile reale.
(c) Determinaţi valorile parametrului m astfel încât $x_1^2+x_2^2=-8$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile complexe ale ecuaţiei.
(d) Să se determine toate valorile întregi ale lui m pentru care ambele rădăcini ale ecuaţiei sunt întregi.

II. Analiză. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-x}}{x}, & \text{dacă } x<0\\ a & \text{dacă } x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{dacă } x>0\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ şi $I_n=\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^n}\,\mathrm{dx}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

(a) Determinaţi a astfel încât funcţia f să fie continuă.
(b) Arătaţi că dacă funcţia f este continuă, atunci ea este şi derivabilă.
(c) Demonstraţi că $f(x)\in(0,1)$, $\forall\, x>0$.
(d) Arătaţi că $I_1=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.
(e) Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

III. Geometrie. Considerăm paralelogramul $ABCD$.

(a) Fie E un punct cu proprietatea că $\overrightarrow{CE}=2\,\overrightarrow{DE}$ şi fie F un punct cu proprietatea că $\overrightarrow{AF}=-2\,\overrightarrow{BF}$. Determinaţi $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{EF}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$.
(b) Demonstraţi că $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.
(c) Presupunem că există un punct M pentru care $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. Demonstraţi că, în acest caz, $ABCD$ este dreptunghi.

IV. Informatică.

(a) Să se arate că orice număr natural nenul se poate scrie în mod unic ca o sumă de puteri ale lui 2 care nu se repetă (exemplu: $77=2^0+2^2+2^3+2^6$).
(b) Numerele naturale de la 1 la 255 se codifică astfel:
  - puterile lui 2 se reprezintă prin literele: $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=8$, $e=16$, $f=32$, $g=64$, $h=128$;
  - orice alt număr din intervalul menţionat va fi reprezentat ca o combinaţie de aceste litere, aranjate în ordine alfabetică, în care orice literă apare cel mult o singură dată, astfel încât suma valorilor acestor litere să fie egală cu valoarea numărului (exemplu: $acdg=77$).

  Să se scrie un program care, citind două şiruri de caractere ce reprezintă numere în convenţia de mai sus, să scrie, la ieşire, şirul ce reprezintă suma numerelor astfel reprezentate (exemplu: dacă la intrare programul primeşte şirurile *acdg* şi *ac* atunci, la ieşire, va scrie *beg*). Şirurile de intrare sunt alese astfel încât suma numerelor pe care le reprezintă să fie mai mică sau egală cu 255.

  Este posibil ca programul să calculeze şirul de ieşire fără a transforma şirurile în numere? Dacă da, daţi o astfel de soluţie.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.

Universitatea din Bucureşti **18.07.2015**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2015

Domeniul de licenţă - *Matematică*

Barem

I. Algebră. Oficiu .... 1 p

(a) Calculul rădăcinilor: 2 şi $-1/2$ .... 2 p

(b) Determinarea lui m: $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{-3-\sqrt{6}}{6}] \cup [\frac{-3+\sqrt{6}}{6}, +\infty)$ .... 3 p

(c) Determinarea lui m: $m = -3/4$ .... 2 p

(d) Determinarea lui $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuaţia are rădăcini întregi: $m \in \{0, -2\}$ .... 2 p

II. Analiză. Oficiu .... 1 p

(a) f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ .... 0,5 p

Studiul continuităţii în 0 şi $a = 1$ .... 1,5 p

(b) Studiul derivabilităţii .... 2 p

(c) Demonstrarea apartenenţei .... 2 p

(d) Calculul integralei .... 1 p

(e) Monotonia .... 1 p

Calculul limitei .... 1 p

III. Geometrie. Oficiu .... 1 p

(a) Determinarea poziţiei punctelor E şi F .... 2 p

$x = \frac{8}{3}$, $y = -1$ .... 2 p

(b) Enunţarea sau utilizarea unei teoreme care permite demonstraţia (teorema cosinusului, teorema medianei, etc.) sau reformularea problemei în limbaj analitic sau vectorial .... 1 p

Demonstrarea relaţiei din enunţ .... 2 p

(c) .... 2 p

IV. Informatică. Oficiu .... 1 p

(a) Numărul poate fi scris ca sumă de puteri ale lui 2 .... 1 p

Există cel puţin o scriere a numărului în care puterile lui 2 nu se repetă .... 1 p

Această scriere este unică .... 1 p

(b) Programul citeşte corect şirurile de caractere .... 1 p

Programul "adună" şirurile corect .... 1 p

Programul afişează corect şirul rezultat .... 1 p

Programul nu transformă şirurile în numere ci le "adună" direct .... 1 p

Programele nu au greşeli de limbaj .... 1 p

Claritatea rezolvărilor .... 1 p