

Concursul de admitere iulie 2015  
Domeniul de licență – Informatică

**I. Algebră.** Fie numărul complex  $z = 1 + 2i$ .

- (a) Să se calculeze  $|1 + z|$  și  $|z^3|$ .
- (b) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  numărul  $z^n$  este de forma  $a_n + ib_n$  cu  $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Să se arate că  $b_{n+2} - 2b_{n+1} + 5b_n = 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (d) Arătați că  $z^n \notin \mathbb{R}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**II. Analiză.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 2x^3}$  și  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Studiați derivabilitatea funcției  $f$  și determinați punctele sale de extrem local.
- (b) Fie  $m \in (0, 1)$ . Determinați numărul de soluții reale distincte ale ecuației  $f(x) = m$ .
- (c) Fie  $x_0 \in (0, 1)$  și  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Arătați că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- (d) Arătați că  $I_1 - I_2 = \frac{1}{8}$ .
- (e) Arătați că șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător și demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

**III. Geometrie.** Pe laturile  $AB$  și  $AC$  ale triunghiului  $ABC$  cu  $AB = 1$ ,  $AC = 2$ ,  $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ , se construiesc, spre exterior, triunghiurile echilaterale  $ABM$  și  $ACN$ .

- (a) Calculați lungimile segmentelor  $BC$  și  $MN$ .
- (b) Fie  $D, E, F$  mijloacele segmentelor  $AM$ ,  $AN$  și  $BC$ . Arătați că triunghiul  $DEF$  este echilateral.
- (c) Calculați  $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$  și  $\vec{AB} \cdot \vec{AN}$ , apoi determinați numerele  $x$  și  $y$  pentru care are loc relația:  
$$\vec{MN} = x \vec{AB} + y \vec{AC}.$$

**IV. Informatică.** Se citesc numerele naturale nenule  $a, b, c, n$ , urmate de o secvență de  $n$  numere naturale distincte, notată cu  $s$ .

- (a) Să se scrie un program care afișează toate perechile  $(x, y)$  cu proprietatea că  $x$  și  $y$  sunt numere diferite din secvența  $s$ , care verifică ecuația  $ax^2 + by^2 = c$ .  
**Exemplu:** Dacă programul citește la intrare 1 1 25 5 3 18 5 0 4, atunci afișează perechile (3,4) (4,3) (0,5) (5,0), nu neapărat în această ordine.
- (b) Dacă secvența  $s$  citită la intrare este formată din numere în ordine crescătoare, să se scrie un program cât mai eficient care afișează numărul de perechi  $(x, y)$  cu proprietatea de la punctul (a). Să se calculeze complexitatea timp a soluției prezentate.  
**Exemplu:** Dacă programul citește la intrare 1 1 25 5 0 3 4 5 18, atunci afișează 4.

**Notă:** Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Pentru fiecare soluție se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

**Timp de lucru 3 ore.**

Concursul de admitere iulie 2015  
Domeniul de licență - *Informatică*

Barem

<b>I. Algebră.</b> Oficiu .....	1 p
(a) $ 1 + z  = 2\sqrt{2}$ .....	1 p
$ z^3  = 5\sqrt{5}$ .....	1 p
(b) .....	3 p
(c) .....	3 p
(d) .....	1 p
<b>II. Analiză.</b> Oficiu .....	1 p
(a) Calculul lui $f'(x)$ pentru $x \neq 0$ și $x \neq 3/2$ .....	1 p
$f$ nu este derivabilă în 0 și în $3/2$ .....	1 p
$x = 0$ și $x = 1$ sunt puncte de extrem local .....	1 p
(b) Pentru $m \in (0, 1)$ ecuația $f(x) = m$ are 3 soluții reale .....	1 p
(c) Monotonia și mărginirea .....	1 p
Determinarea limitei .....	1 p
(d) Calculul integralei .....	1 p
(e) Monotonia .....	1 p
Calculul limitei .....	1 p
<b>III. Geometrie.</b> Oficiu .....	1 p
(a) $BC = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$ .....	2 p
$MN = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$ .....	2 p
(b) .....	3 p
(c) $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \frac{1}{2}$ , $\vec{AB} \cdot \vec{AN} = 0$ .....	1 p
$x = -2 - 2\sqrt{3}$ , $y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .....	1 p
<b>IV. Informatică.</b> Oficiu .....	1 p
(a) Afișarea a cel puțin unei perechi (dacă există) cu proprietatea din enunț .....	1 p
Afișarea doar a unor perechi cu proprietatea din enunț .....	1 p
Afișarea tuturor perechilor cu proprietatea din enunț .....	1 p
(b) Afișarea corectă a numărului de soluții, indiferent de complexitate .....	1 p
Afișarea corectă a numărului de soluții în timp cel mult $O(n \log n)$ .....	1 p
Afișarea corectă a numărului de soluții în timp cel mult $O(n)$ .....	1 p
Calculul corect al complexității timp .....	1 p
Programele nu au greșeli de limbaj .....	1 p
Claritatea rezolvărilor .....	1 p