

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR DECLARATE  
VACANTE/REZERVATE ÎN UNITĂȚILE DE ÎNVĂȚĂMÂNT PREUNIVERSITAR  
15 iulie 2015

Probă scrisă  
Matematică

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x + \log_b x$ , unde  $a \in (0, 1)$  și  $b \in (1, +\infty)$ .
- 5p a) Calculați  $f(1)$ .
- 5p b) Arătați că  $f(x) = \log_b(ab) \cdot \log_a x$ , pentru orice  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p c) Demonstrați că  $(x-1)f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in (0, +\infty)$  dacă și numai dacă  $ab \leq 1$ .
2. Se consideră trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 12$  cm,  $CD = 4$  cm,  $AC \cap BD = \{O\}$ , punctul  $E \in AD$  astfel încât  $OE \parallel AB$  și se notează cu  $F$  intersecția dreptelor  $BE$  și  $DC$ .
- 5p a) Arătați că  $OE = 3$  cm.
- 5p b) Demonstrați că  $DF = CD$ .
- 5p c) Dacă ( $EO$  este bisectoarea unghiului  $BEC$ ), arătați că trapezul  $ABCD$  este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră polinomul  $f = (X - 2013)(X - 2014)(X - 2015) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ , unde  $a_0, a_1, a_2$  și  $a_3$  sunt numere reale.
- 5p a) Determinați rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p b) Arătați că  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 < 0$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a_2$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x + 1$ .
- 5p a) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui  $m$ , știind că ecuația  $f(x) = m$  admite exact două soluții reale și distincte.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a:

<b>Competențe specifice</b>	<b>Conținuturi</b>
<ol style="list-style-type: none"><li><b>Identificarea</b> rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale în enunțuri diverse</li><li><b>Reprezentarea</b> unor date sub formă de tabele sau de diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora</li><li><b>Alegerea</b> metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale</li><li><b>Caracterizarea și descrierea</b> mărimilor care apar în rezolvarea unor probleme prin regula de trei simplă</li><li><b>Analizarea</b> unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, procentelor sau proporțiilor</li><li><b>Rezolvarea</b> cu ajutorul rapoartelor și proporțiilor a unor situații-problemă și interpretarea rezultatelor</li></ol>	<p><b>Rapoarte și proporții</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Rapoarte; procente; probleme în care intervin procente</li><li>Proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor, aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporție</li><li>Proporții derivate</li><li>Mărimi direct proporționale; regula de trei simplă</li><li>Mărimi invers proporționale; regula de trei simplă</li><li>Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice; probabilități</li></ul>

(Programa școlară de matematică, OMECI nr. 5097/09.09.2009)

Elaborați doi itemi: un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip întrebare structurată* (cu trei subîntrebări), ca parte componentă a unui test de evaluare la finalul unității de învățare **Rapoarte și proporții**, prin care se evaluează formarea/dezvoltarea a două competențe specifice precizate în secvența dată din programa școlară. În elaborarea itemului de tip întrebare structurată se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- succesiunea subîntrebărilor să asigure creșterea treptată a gradului de dificultate;
- fiecare subîntrebare să solicite un răspuns care nu depinde de răspunsul la subîntrebarea precedentă;
- subîntrebările să fie în concordanță cu stimulul utilizat.

**Notă.** Se punctează corectitudinea proiectării itemilor, elaborarea răspunsului așteptat (barem de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

**CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR DECLARATE  
VACANTE/REZERVATE ÎN UNITĂȚILE DE ÎNVĂȚĂMÂNT PREUNIVERSITAR  
15 iulie 2015**

**Probă scrisă  
Matematică**

**Varianta 3**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	a) $f(1) = \log_a 1 + \log_b 1 =$ $= 0$	2p 3p
	b) $\log_b(ab) \cdot \log_a x = (\log_b a + \log_b b) \cdot \log_a x = (\log_b a + 1) \cdot \log_a x =$ $= \log_b a \cdot \log_a x + \log_a x = \log_b x + \log_a x = f(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p 3p
	c) Dacă $(x-1)f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , atunci $(a-1)f(a) \geq 0$ și, cum $a \in (0, 1)$ , obținem $\log_b(ab) \leq 0$ , deci $ab \leq 1$  Dacă $ab \leq 1$ , cum $b \in (1, +\infty)$ , atunci $\log_b(ab) \leq 0$ și, cum $\log_a x$ și $x-1$ au semne opuse pentru orice $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , obținem $(x-1)f(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p 3p
2.	a) $AB \parallel CD \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{AO}{CO} = 3$ , deci $\frac{AO}{AC} = \frac{3}{4}$  $OE \parallel CD \Rightarrow \triangle AOE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{OE}{CD} \Rightarrow OE = 3 \text{ cm}$	3p 2p
	b) $OE \parallel DF \Rightarrow \triangle BOE \sim \triangle BDF \Rightarrow \frac{OE}{DF} = \frac{BO}{BD}$  Deoarece $\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC}$ și $\frac{BO}{BD} = \frac{AO}{AC}$ , obținem $DF = CD$	3p 2p
	c) $EO \parallel CF \Rightarrow \sphericalangle BEO \equiv \sphericalangle EFC$  $EO \parallel CF \Rightarrow \sphericalangle CEO \equiv \sphericalangle ECF$ și, cum $\sphericalangle BEO \equiv \sphericalangle CEO$ , obținem $\sphericalangle EFC \equiv \sphericalangle ECF$  $\triangle ECF$ este isoscel și $ED$ este mediană, rezultă $ED \perp CF$ , deci trapezul $ABCD$ este dreptunghic	1p 3p 1p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.	a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2013)(x-2014)(x-2015) = 0$ $x_1 = 2013$ , $x_2 = 2014$ și $x_3 = 2015$	2p 3p
	b) $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = f(1)$  $f(1) = (1-2013)(1-2014)(1-2015) = -2012 \cdot 2013 \cdot 2014 < 0$	3p 2p
	c) $a_3 = 1$  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \Rightarrow a_2 = -6042$	2p 3p

<b>2.</b>	<p><b>a)</b> <math>\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (xe^x + 1) dx = xe^x \Big _0^1 - e^x \Big _0^1 + x \Big _0^1 =</math>  <math>= e^0 + 1 = 2</math></p>	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
	<p><b>b)</b> <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1</math>  <math>f'(x) \leq 0</math> pentru orice <math>x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f</math> este descrescătoare pe <math>(-\infty, -1]</math>  <math>f'(x) \geq 0</math> pentru orice <math>x \in [-1, +\infty) \Rightarrow f</math> este crescătoare pe <math>[-1, +\infty)</math></p>	<b>1p</b>
		<b>2p</b>
	<p><b>c)</b> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, f(-1) = 1 - \frac{1}{e}</math> și <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>          Deoarece <math>f</math> este strict descrescătoare pe <math>(-\infty, -1)</math> și strict crescătoare pe <math>(-1, +\infty)</math>, ecuația  <math>f(x) = m</math> admite exact două soluții reale și distincte dacă și numai dacă <math>m \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)</math></p>	<b>3p</b>
		<b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>Itemul de tip alegere multiplă elaborat</b>	
Corectitudinea proiectării itemului	<b>5p</b>
Elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>5p</b>
Corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>5p</b>
<b>Itemul de tip întrebare structurată elaborat</b>	
Corectitudinea proiectării itemului	<b>5p</b>
Elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>5p</b>
Corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>5p</b>