XIX JUNIOR BALKAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
Belgrade, Serbia

19^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia

Language: Romanian
vineri, 26 iunie 2015

1. Determinaţi toate numerele prime a, b, c şi numerele naturale nenule k care satisfac egalitatea

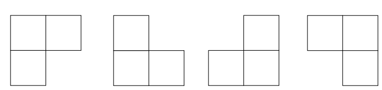
$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

2. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c = 3$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei

$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Dreptele ℓ_1 şi ℓ_2 sunt perpendiculare pe dreapta AB în punctele A, respectiv B. Perpendicularele duse din mijlocul M al segmentului $[AB]$ pe dreptele AC şi BC intersectează ℓ_1 şi ℓ_2 în punctele E şi respectiv F.
Dacă D este punctul de intersecţie a dreptelor EF şi MC, arătaţi că $\angle ADB \equiv \angle EMF$.

4. O ,,formă L" este oricare din următoarele patru piese, fiecare constând din trei pătrăţele unitate:



Se dau: o tablă 5×5, constând din 25 de pătrăţele unitate, un număr natural nenul $k \leq 25$ şi o colecţie nelimitată de ,,forme L".
Doi jucători, A şi B, joacă următorul joc: începând cu A, ei marchează, alternativ, câte un pătrăţel care nu era marcat anterior, până când pe tablă sunt k pătrăţele marcate.
O aşezare a unor ,,forme L" pe pătrăţelele rămase nemarcate pe tablă se numeşte *bună* dacă fiecare piesă acoperă exact trei pătrăţele unitate nemarcate şi oricare două piese nu se suprapun.
Jucătorul B câştigă dacă orice aşezare *bună* a unor ,,forme L" lasă neacoperite cel puţin trei pătrăţele unitate nemarcate. Determinaţi valoarea minimă a lui k pentru care B are strategie câştigătoare.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 10 puncte