Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $(2-3i)(2+3i)$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Calculați $f\left(f(3)\right)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+17\right)=\log_3 81$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ și $C(2,1)$. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A(a)\right)=0$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A(2)\cdot X=A(8)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.
5p	**a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Calculați $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi ca funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=a$, are aria egală cu $4+\ln a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=$	**3p**
	$=13$	**2p**
2.	$f(3)=5$	**2p**
	$f(f(3))=f(5)=9$	**3p**
3.	$x^2+17=81 \Leftrightarrow x^2=64$	**2p**
	$x_1=-8$ și $x_2=8$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Sunt 90 numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 18 numere naturale de două cifre, divizibile cu 5, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\dfrac{2-a}{2}$ și $m_{BC}=1$	**2p**
	$m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{4}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $A(-1)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{vmatrix}=4-4a^2$	**3p**
	$4-4a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ și $a_2=1$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=-12\neq 0 \Rightarrow (A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(8) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 16\\ 16 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=2\cdot(-3)\cdot 3-6\cdot(-3)-6\cdot 3+21=$ $=-18+18-18+21=3$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$ $=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}=\left(1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\right)\circ 3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=$ $=3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ $f'(x)=3e^x+2x$ și $f'(0)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=3$	**2p** **3p**
b)	$f(0)=3$, $f'(0)=3$ Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=3x+3$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=3e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p** **3p**
2.a)	$\int\limits_1^3\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=\int\limits_1^3 x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\Big\vert_1^3=$ $=\dfrac{1}{2}(9-1)=4$	**3p** **2p**
b)	$\int\limits_1^2\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)e^x dx=\int\limits_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^2-\int\limits_1^2 e^x dx=$ $=2e^2-e-e^x\Big\vert_1^2=e^2$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}=\int\limits_1^a\lvert f(x)\rvert dx=\int\limits_1^a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big\vert_1^a=\dfrac{a^2-1}{2}+\ln a$ $\dfrac{a^2-1}{2}+\ln a=4+\ln a\Leftrightarrow a^2=9$ și cum $a>1$, obținem $a=3$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+2015$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=2$.

5p **4.** După o reducere cu 10% un obiect costă 99 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de reducere.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,1)$ și $N(4,1)$. Determinați lungimea segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{4}{5}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Arătați că $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-2)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(3)=5$.

5p **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $3e-4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$	**3p**
	$\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2015$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=2015$	**2p**
3.	$x+2=4$	**2p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$p-10\%\cdot p=99$, unde p este prețul obiectului înainte de reducere	**3p**
	$p=110$ lei	**2p**
5.	$MN=\sqrt{(4-2)^2+(1-1)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot1-2\cdot1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
c)	$\det(A+I_2)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det(A-I_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$	**3p**
	$\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=4+(-2)=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot1^2-2\cdot1+1=$	**3p**
	$=1-2-2+1=-2$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1=$	**3p**
	$=-1-2+2+1=0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)\Leftrightarrow\dfrac{2}{-1}=a\cdot(-2)\Leftrightarrow a=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'=$	**2p**
	$=1-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=1+\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(3)=5\Rightarrow c=-10$, deci $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x-10$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1 e^x\left(x^2+2\right)dx=e^x\left(x^2+2\right)\Big\|_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=3e-2-\left(2xe^x\Big\|_0^1-\int_0^1 2e^xdx\right)=$	**3p**
	$=3e-2-2e+2e^x\Big\|_0^1=3e-4$	**2p**