

Examenul de bacalaureat național 2015

Matematică *M_mate-info*

Subiectul I

1. $(\sqrt{5} + 1)^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 12.$

2. $f(1)f(2)f(3)f(4) = (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 0.$

3. Punem condiția $x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$ Ecuația devine $x^2 - 4x + 4 = 1 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x \in \{1, 3\}.$

4. Numerele \overline{abc} impare au c impar, deci $c = 3.$ Înseamnă că numerele sunt 243 și 423, deci sunt 2 numere.

5. Panta dreptei AB este $m = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1.$ Panta dreptei perpendiculare pe AB în A este $m' \cdot 1 = -1 \Rightarrow m' = -1.$ Obținem $y - 2 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + 3.$

6. $\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = \sin x.$ Analog $\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = -\sin x.$ Adunând obținem concluzia.

Subiectul II

1. a) $\det B(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

b) $B(x) + B(y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x + y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x + 3y & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\frac{x+y}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2B(\frac{x+y}{2})$

c) $B(x^2 + 1)B(x) = \begin{pmatrix} 1 + 3x(x^2 + 1) & 0 & x^2 + x + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2 + x + 1) & 0 & 1 + 3x(x^2 + 1) \end{pmatrix}.$

Egalitatea $B(x^2 + 1)B(x) = B(x^2 + x + 1)$ este echivalentă cu $1 + 3x(x^2 + 1) = 1.$ Deducem că $3x(x^2 + 1) = 0,$ deci $x = 0$ pentru că ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are soluții reale.

2. a) $(-3) \circ 3 = \frac{1}{2}(-3 - 3)(3 - 3) + 3 = 3.$

b) $n \circ n = 11 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(n - 3)^2 + 3 = 11 \Rightarrow (n - 3)^2 = 16 \Rightarrow n \in \{-1, 7\} \cap \mathbb{N} \Rightarrow n = 7.$

c) Observăm că $x \circ 3 = 3 \circ x = 3,$ pentru orice $x \in \mathbb{R}.$ Deci $1 \circ 2 \circ \dots \circ 2015 = a \circ 3 \circ b = 3 \circ b = 3,$ unde $a = 1 \circ 2$ și $b = 4 \circ 5 \circ \dots \circ 2015.$

Subiectul III

1. a) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x - 1) - (x + 2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = -\frac{3}{(x - 1)^2}.$

b) $f''(x) = (-3(x - 1)^{-2})' = 6(x - 1)^{-3} > 0, \forall x > 1 \Rightarrow$ funcția este convexă pe $(1, +\infty).$

c) Panta tangentei la grafic în punctul $A(x_0, f(x_0))$ este -3 , deci $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{(x_0 - 1)^2} = -3 \Rightarrow (x_0 - 1)^2 = 1$. Obținem $x_0 \in \{0, 2\} \cap (1, +\infty) \Rightarrow x_0 = 2$. Punctul căutat este $A(2, 4)$.

2. a) $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x) dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e = e(e - 1)$.

b) $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$. Din $F(1) = 0$ deducem $1 \cdot e - e + C = 0 \Rightarrow C = 0$.
Deci $F(x) = x e^x - e^x = (x - 1)e^x$.

c) $I_n = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx = e - (n+1)I_{n-1}$. Deci $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$.