Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(2,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6**. Arătați că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 3x & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(B(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculaţi $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**2p**
	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}\Rightarrow\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)=12$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)f(2)f(3)f(4)=0$	**2p**
3.	$x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 3	**2p**
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+3$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$\sin(\pi+x)=-\sin x\Rightarrow\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(B(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\cdot\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B\left(x^2+1\right)B(x)=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$, $B\left(x^2+x+1\right)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$3x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$	**2p**
	$(n-3)^2=16 \Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=7$, care convine	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015=(1\circ 2)\circ 3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(x)=-3 \Leftrightarrow (x-1)^2=1$	**3p**
	Cum $x\in(1,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=2$ și $y=4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{1}{x}f(x)\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx=\left(x^{n+1}e^x\right)\Big\|_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 8

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{32}-\sqrt{18}-\sqrt{2}=0$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-2x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{5-3x}=25$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale pare de două cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4 şi 5.
5p	**5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(5,3)$ și $C(5,6)$. Arătați că $AB=BC$.
5p	**6.** Arătați că $\sin 30°+\sin 45°\cdot\cos 45°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y$.
5p	**1.** Arătați că $2015\circ(-1)=-1$.
5p	**2.** Demonstrați că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.
5p	**3.** Verificați dacă $e=0$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**4.** Arătați că $x\circ x=(x+1)^2-1$, pentru orice număr real x.
5p	**5.** Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=0$.
5p	**6.** Arătaţi că $x\circ(x+1)\geq x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det(A(0))=-2$.
5p	**2.** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\det(A(a)-I_2)<0$.
5p	**4.** Arătați că $(2a+1)A(a)-A(a)\cdot A(a)=(a^2+a-2)I_2$, pentru orice număr real a.
5p	**5.** Determinați inversa matricei $A(2)$.
5p	**6.** Determinaţi numerele naturale m pentru care $\det(A(m))\leq 1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	**2p**
	$4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$	**3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=4-2x\Leftrightarrow 3x=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=1$ și $y=2$	**2p**
3.	$5^{5-3x}=5^2\Leftrightarrow 5-3x=2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 5 moduri, deci se pot forma $2\cdot 5=10$ numere	**3p**
5.	$AB=3$	**2p**
	$BC=3\Rightarrow AB=BC$	**3p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$2015\circ(-1)=2015\cdot(-1)+2015+(-1)=$	**3p**
	$=-2015+2015-1=-1$	**2p**
2.	$(x\circ y)\circ z=(xy+x+y)\circ z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$	**2p**
	$x\circ(y\circ z)=x\circ(yz+y+z)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z=(x\circ y)\circ z$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
3.	$x\circ 0=x\cdot 0+x+0=x$	**2p**
	$0\circ x=0\cdot x+0+x=x=x\circ 0$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
4.	$x\circ x=x\cdot x+x+x=x^2+2x=$	**2p**
	$=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$, pentru orice număr real x	**3p**
5.	$x\circ x\circ x\circ x=(x+1)^4-1$	**2p**
	$(x+1)^4=1\Leftrightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$	**3p**
6.	$x\circ(x+1)-x=x(x+1)+x+x+1-x=x^2+2x+1=$	**2p**
	$=(x+1)^2\geq 0$, deci $x\circ(x+1)\geq x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\cdot 1-1\cdot 2=$	**3p**
	$=0-2=-2$	**2p**
2.	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}a & 2\\ 1 & a+1\end{vmatrix}=a^2+a-2$	**3p**
	$a^2+a-2=0 \Leftrightarrow a_1=-2$ și $a_2=1$	**2p**
3.	$A(a)-I_2=\begin{pmatrix}a-1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(a)-I_2\right)=a^2-a-2$	**2p**
	$a^2-a-2<0 \Leftrightarrow a\in(-1,2)$	**3p**
4.	$(2a+1)A(a)=\begin{pmatrix}2a^2+a & 4a+2\\ 2a+1 & 2a^2+3a+1\end{pmatrix}$	**1p**
	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+2 & 4a+2\\ 2a+1 & a^2+2a+3\end{pmatrix}$	**2p**
	$(2a+1)A(a)-A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+a-2 & 0\\ 0 & a^2+a-2\end{pmatrix}=\left(a^2+a-2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(a^2+a-2\right)I_2$, pentru orice număr real a	**2p**
5.	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\det\left(A(2)\right)=4\neq 0$	**2p**
	$\left(A(2)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
6.	$\det\left(A(m)\right)\leq 1 \Leftrightarrow m^2+m-3\leq 0$	**2p**
	Cum m este număr natural obținem $m=0$ și $m=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-2i=0$.
5p	**2.** Calculați $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x+7$.
5p	**6.** Determinați aria triunghiului MNP, știind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0)=2$.
5p	**b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.
5p	**b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.
5p	**c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\frac{1}{3}$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015}\frac{1}{f(x)}dx\leq\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$	**3p**
	$z^2-2i=2i-2i=0$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=2015$	**3p**
3.	$x^2-5x=3-3x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=3$	**2p**
4.	$C_5^4=\dfrac{5!}{4!\cdot 1!}=$	**3p**
	$=5$	**2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu 2	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=2x+4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{12\cdot 3\cdot \sin 30^\circ}{2}=\dfrac{6\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-0\cdot 0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&-a\\-a&1\end{vmatrix}=1-a^2$	**3p**
	$1-a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ și $a_2=1$	**2p**
c)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+ab&-b-a\\-a-b&ab+1\end{pmatrix}$, $A(a+b)=\begin{pmatrix}1&-a-b\\-a-b&1\end{pmatrix}$, $abI_2=\begin{pmatrix}ab&0\\0&ab\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1+ab&-a-b\\-a-b&1+ab\end{pmatrix}=A(a)A(b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-m\cdot 0+2=$	**3p**
	$=0-0+2=2$	**2p**
b)	Restul este $(3-m)X$	**3p**
	$3-m=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=m(x_1+x_2+x_3)-6=m\cdot 0-6=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-1$ și $f'(0)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$	**3p**
b)	$e^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(0)=0$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	Cum f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$, obţinem $f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\int_0^1\left(x^2-2x+5+2x-5\right)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left(x^2-2x+5\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\ln 5-\ln 5=0$	**2p**
c)	$f(x)=(x-1)^2+4\ge 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\le\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{4}dx=\dfrac{1}{4}x\Big\vert_{2014}^{2015}=\dfrac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=4$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(4,6)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.
5p	**6.** Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-2$.
5p	**b)** Arătați că $A+B=5C$.
5p	**c)** Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.
5p	**a)** Arătați că $5\circ(-4)=-4$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=2015$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural n, $n>1$, ştiind că $\int_1^n\frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$	**3p**
	$\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$	**2p**
2.	$f(a)=0 \Leftrightarrow a-2=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x+3=16$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=4$	**2p**
	$y_M=4$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=5C$	**2p**
c)	$AB=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=25C$	**2p**
2.a)	$5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot5+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-20+20-16+12=-4$	**2p**

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 =$	**2p**
	$= x(y+4) + 4(y+4) - 4 = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x \circ x = (x+4)^2 - 4$	**2p**
	$(x+4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ și $x_2 = -3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(2x^3\right)' + \left(3x^2\right)' + 5' =$	**2p**
	$= 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 2x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x(x+1)}{3x^2 + 5} =$	**2p**
	$= 2$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 0$	**2p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$	**1p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**1p**
2.a)	$\int\limits_1^2 \left(f(x) - 3x^2\right) dx = \int\limits_1^2 4x^3 dx = x^4 \Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= 16 - 1 = 15$	**2p**
b)	$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^4 + x^3 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(1) = 2015 \Rightarrow c = 2013$, deci $F(x) = x^4 + x^3 + 2013$	**3p**
c)	$\int\limits_1^n \dfrac{f(x)}{x^2} dx = \int\limits_1^n (4x+3) dx = 2x^2 \Big\vert_1^n + 3x \Big\vert_1^n = 2n^2 + 3n - 5$	**3p**
	$2n^2 + 3n - 5 = 9$ și cum n este număr natural, $n > 1$, obținem $n = 2$	**2p**