M_mate-info pentru filiera teoretică , specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. a) Se consideră numărul complex $z = \frac{12-5i}{3+4i}$. Să se calculeze modulul numarului .

   b) Șirul b_n reprezintă o progresie geometrică, cu termeni pozitivi . Dacă $b_1 + b_2 = 6$ și $b_3 + b_4 = 24$, să se calculeze suma primilor cinci termeni ai progresiei .

   c)Determinați numărul real x știind că $x, (x-1)^2$ $și$ $x+2$ sunt în progresie aritmetică .

2. a)Se considera funcțiile $f: R \to R, f(x) = 2x - 1$ și $g: R \to R, g(x) = x + a$. Determinați $a \in R$ știind că $f°g = g°f$.

   b)Se consideră funția $f: R \to R, f(x) = (a-1)x^2 + 2(a+1)x + a + 1, a \in R$. Să se determine a știind că $x = \frac{1}{2}$ este axă de simetrie pentru graficul funcției .

   c)Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m - 1, m \in R$. Să se determine m pentru care graficul funcției este deasupara axei Ox . Să se determine m astfel încât vârful parabolei se găsește pe dreapta de ecuație $y = -2$.

3. Să se rezolve ecuațiile :

   a) $\sqrt{x+1} = 1 - 2x$

   b) $log_2(3x-2) + log_2(x+2) = 4$

   c) $2^{x^2+x} = 4^{x^2-x+1}$

4. a) Determinati $n \in N, n \geq 2$ $astfel$ $încat$ $C_n^2 + A_n^2 = 18$

   b) Determinați probalitatea ca alegând o funcție $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$, aceasta sa fie strict descrescătoare .

   c) Se considera multimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Să se determine probabilitatea ca alegând o submulțime de 4 elemente, dintre submulțimile nevide ale lui A, aceasta să nu conțină elementul 3 .

5. a) Se consideră triunghiul ABC astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}, \overrightarrow{AC} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul lui BC .

   b)Se consideră punctele A(1,1) și B(-1,3) . Să se determine coordonatele punctului M dacă este indeplinită relația $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

   c) Se consideră punctele A(1,1) , B(5,4) și C(2,-3) . Să se determine ecuația dreptei care trece prin A și este paralela cu BC, ecuația dreptei care trece prin B și este perpendiculară pe AC, ecuația mediatoarei segmentului AB, respectiv ecuația medianei din C.

6. a) Se consideră triunghiul ABC având laturile AB=8, BC=6 și AC=10 . Să se calculeze raza cercului înscris și raza cercului circumscris triunghiului .

   b) Dacă $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \sin(a) = \frac{3}{5}$, să se calculeze $tg(a), \sin(2a), \cos(2a)$ și $tg\,\frac{a}{2}$.

   c) Să se arate că pentru $x \in R$ are loc relația $sin40^\circ \cdot sin140^\circ - cos^2 130^\circ = 0$.

Subiectul II

1. Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ ax + y - 2z = 1 \\ -x + 3y + z = b \end{cases}$, $a, b \in R$.

   a) Calculați determinantul matricei sistemului .

   b) Arătați că rang(A)=3 oricare ar fi $a \in Z$, unde A este matricea coeficienților sistemului .

   c) Determinați a și b astfel încât sistemul să fie incompatibil .

   d) Determinați a și b astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

2. Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați det(A) .

b) Să se arate că este adevărată identitatea $A^2 - A - 2I_3 = O_3$

c) Calculați A^{-1}

d) Determinați $x \in R$ dacă det $(xA + I_3) = 0$.

3. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^3 + aX^2 + X + 5$, având coeficienții reali .

a) Pentru $a = -2$, să se calculeze $f(-1)$.

b) Determinați valoarea parametrului a dacă f este divizibil cu $X + 1$.

c) Să se arate că pentru $a = 5$, polinomul nu are toate rădăcinile reale .

d) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$

e) Pentru $a = -1$ să se calculeze $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)(x_4 + 1)$.

4. Se considera $G = (4, \infty)$ $și\ legea\ de\ compozitie\ x * y = xy - 4x - 4y + 20$.

a) Să se calculeze $5 * 6$

b) Arătați că G este parte stabilă a lui **R** în raport cu legea * .

c) Să se calculeze expresia $E = 1 * 2 * 3 * \dots * 2015$

d) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{de\ n\ ori} = 5, unde\ x \in G.$

Subiectul III

1. Fie funcția $f: R \setminus \{1\} \to R, f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

b) Să se determine ecuația tangentei, care trece prin punctul de abscisă $x = 3$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f, respectiv punctele de extrem .

d) Arătați că funcția f este concavă pentru $x \in (-\infty, 1)$.

e) Să se arate ca $f(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 1)$

f) Să se determine $a \in R\ astfel$ încât $f(x) \geq a\ pentru\ \forall x \in (1, \infty)$

g) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)^{x+2}$

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx$, $n \in N$.

a) Calculați I_1, I_3 .

b) Să se arate că $I_{n+3} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$, pentru $n \geq 1, n \in N$.

c) Să se arate că șirul I_n este convergent .

d) Să se calculeze limitele $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$ și $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$

3. Se consedera funcția $f: R \to R, f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

a) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare pentru $\forall\ x \in (0, \infty)$.

b) Sa se arate ca $F: R \to R, F(x) = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3}$ este o primitivă a funcției f .

c) Să se calcleze $\int_{-2}^{2} f(x) dx$.

d) Să se calculeze aria suprafeței delimitată de graficul funcției f axele $x = -1$ $și$ $x = 2$.

e) Să se calculeze volumul corpului de roatație generat de graficul funcției f axele $x = 0$ $și$ $x = 1$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$.

g) Dacă funcția $g: [0, \infty) \to R$ $și$ $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, atunci să se arate că funcția este convexă .

Prof. Aurelian Răducu, Colegiul Național “Alexandru Odobescu”, Pitești