MINISTERUL EDUCAȚIEI ,CERCETĂRII,TINERETULUI ȘI SPORTULUI
COLEGIUL NAȚIONAL VLAICU VODĂ
Municipiul Curtea de Argeş,
Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300
Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;
E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com
Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

FIȘĂ FINALA RECAPITULARE BACALAUREAT 2015

MODEL NR. 1 SUBIECTUL I

1. Aflaţi $x \in \Box$, pentru care numerele $3;\ 2x+2;\ 10x-2$ sunt în progresie geometrică.

2. Determinaţi valorile numărului real a pentru care vârful parabolei $y=x^2-ax-3$ aparţine dreptei de ecuaţie $d: x+2y+21=0$.

3. Rezolvaţi, în $\Box$, inecuaţia: $2^{\log_9 x} \le \sqrt{2}$.

4. Câte submulţimi cu patru elemente ale mulţimii $A=\{1,2,3,.....,9\}$ nu conţin elementul 5 ?

5. Aflaţi $m \in \Box$ pentru care punctele A(7, -1) , B(m, 3) şi C(2m, 0) sunt coliniare.

6. Dacă $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{6}}$, aflaţi $\sin 2x$.

MODEL NR. 2 SUBIECTUL I

1) Se dă numărul complex $z = 1 + i$ .Să se arate că $z + 2 \cdot \frac{1}{z}$ este număr real.

2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - ax + 1$. Să se afle valorile parametrului real a pentru care minimul funcției are valoarea 0.

3) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2 \cdot 4^x + 1 = 3 \cdot 2^x$.

4) Care e probabilitatea ca , alegând un număr de două cifre, acesta să nu fie divizibil cu 9?

5) Pentru ce valori ale lui *m* vectorii $\vec{u}(1\,,3)\,,\vec{v}(6\,,m)$ sunt ortogonali?

6) În triunghiul ascuțitunghic *ABC* , $AB = 10\,, AC = 13\,, \sin A = \frac{5}{13}$.Aflați lungimea laturii *BC*.

MODEL NR. 1 SUBIECTUL II

1) Se consideră matricile $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & 1 & 3 \\ 3 & 1 & n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$.

5p a) Calculați $\det A(1)$.

5p b) Arătați că $A(1) + A(2) + A(3) + \cdots \ldots + A(2015) = 2015 \cdot A(1008)$.

5p c) Determinați inversa matricei $A(1) + A(2) + I_3$.

2) Se consideră polinomul $f = x^3 + mx^2 + 2x + 1, m \in \mathbb{R}$, *cu rădăcinile* x_1, x_2, x_3.

5p a) Calculați $f(1) + f(-1)$.

5p b) Determinați valorile lui *m* pentru care $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 4$.

5p c) Demonstrați că există cel puțin trei valori întregi ale lui *m* pentru care *f* nu are toate rădăcinile reale.

MODEL NR. 2 SUBIECTUL II

1)Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ a^2x + ay + z = a \end{cases}$,unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Calculați determinantul matricei sistemului.

5p b) Să se arate că sistemul este compatibil pentru orice valoare a parametrului a.

5p c) Pentru $a = 1, z = 3$, aflați soluția$(x_0, y_0, 3)$ cu componentele în progresie aritmetică.

2)Se consideră polinomul $f = 2x^3 + mx - 7, f \in \mathbb{R}[X]$.

5p a) Pentru $m = 5$, să se arate că $f(1) = 0$.

5p b) Să se determine *m* știind că $x - 2$ divide polinomul *f*.

5p c) Să se arate că , dacă *m* este pozitiv , atunci polinomul are două soluții complexe.

MODEL NR. 1 SUBIECTUL III

	1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x \in (-2,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că ecuația $f(x) = 1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.
5p	**a)** Arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$.
5p	**b)** Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

SOLUTIE MODEL 1

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(xe^x\right)'\cdot(x+2)-xe^x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$ $=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\cdot(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2},\ x\in(-2,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}x$	**2p** **3p**
c)	Funcţia $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$ este continuă pe $[1,2]$ $g(1)\cdot g(2)=\dfrac{e-3}{3}\cdot\dfrac{e^2-2}{2}<0$, deci există $c\in(1,2)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=1$	**2p** **3p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)dx=$ $=x\Big\|_0^1-\ln(1+x)\Big\|_0^1=1-\ln 2$	**2p** **3p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n\left(\dfrac{x}{1+x^{n+1}}-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)}dx$ Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x-1\le 0$, $x^n\ge 0$, $1+x^n>0$ şi $1+x^{n+1}>0$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$	**2p** **3p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}\le x^n$ $0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p** **3p**

MODEL NR. 2 SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\ge 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\dfrac{1}{4}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)dx\right)=\dfrac{1}{4}$.

SOLUTIE

1.a)	$f'(x)=(3x)'+(e^x)'=$	**2p**
	$=3+e^x,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\geq g(0)\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+x+1)f(x)dx=\int_0^1 x^3dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{x^4}{4}\right\|_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int_0^1(f(x)-x+1)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left.\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^3}{4t^3(t^2+t+1)}=\frac{1}{4}$	**2p**