COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a VI-a

1. Aflaţi câte numere naturale impare mai mici decât 2015 au exact 10 divizori naturali.

Adrian Vieriu, Suceava

2. Dacă $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = |x_3 - x_4| = ... = |x_{2014} - x_{2015}| = |x_{2015} - x_1|$ şi $x_1, x_2, ... x_{2015} \in \mathbb{Z}$, să se arate că $(x_1 + x_2 + ... + x_{2015}) \vdots 2015$.

Vasile Solcanu, Suceava

3. În triunghiul isoscel *ABC* (*AB*=*AC*) avem $m(\sphericalangle BAC) = 100^\circ$. Considerăm $[BD$ bisectoarea unghiului *ABC*, $D \in (AC)$ şi $[DE$ bisectoarea unghiului *BDC*, $E \in (BC)$.

a) Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle$ *CAE*.

b) Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, să se demonstreze că triunghiul *EBF* este isoscel.

***

<u>NOTĂ:</u> Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a VI-a

1. Aflaţi câte numere naturale impare mai mici decât 2015 au exact 10 divizori naturali.

Adrian Vieriu, Suceava

Soluţie:
Sunt posibile cazurile a^9 sau $a \cdot b^4$, cu a, b numere prime impare, $a \neq b$.

1) $3^9 > 2015$ deci nu avem soluţii
2) $7^4 > 2015 \Rightarrow b \in \{3,5\}$

Pentru b=3 se obţine $a \in \{5,7,11,13,17,19,23\}$

Pentru b=5 se obţine a=3.

În total sunt 8 astfel de numere

Barem:

Prezentarea cazurilor	2p
Cazul a^9	2p
Cazul $a \cdot b^4$	3p

2. Dacă $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = |x_3 - x_4| = \ldots = |x_{2014} - x_{2015}| = |x_{2015} - x_1|$ şi $x_1, x_2, \ldots x_{2015} \in \mathbb{Z}$, să se arate că $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2015} \vdots 2015$.

Vasile Solcanu, Suceava

Soluţie: Notăm fiecare din cele 2015 module cu k, $k \geq 0$. Atunci

$$x_1 - x_2 = \pm k, x_2 - x_3 = \pm k, \ldots, x_{2014} - x_{2015} = \pm k, x_{2015} - x_1 = \pm k.$$

Sumând se obţine $0 = n \cdot k$, $n \in \mathbb{N}$ impar deoarece avem 2015 module $\Rightarrow k = 0$.

Obţinem că toate numerele sunt egale şi suma va fi $2015 \cdot x_1$, deci divizibilă cu 2015.

Barem:

Interpretează modulele	2p
Obţine că numerele sunt egale	4p
Finalizare	1p

3. În triunghiul isoscel ABC (AB=AC) avem $m(\angle BAC) = 100^\circ$. Considerăm $[BD$ bisectoarea unghiului ABC, $D \in (AC)$ şi $[DE$ bisectoarea unghiului BDC, $E \in (BC)$.

a) Determinaţi măsura unghiului $\angle CAE$.

b) Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, să se demonstreze că triunghiul EBF este isoscel.

Soluţie: a) $\triangle ABC$ isoscel şi $m(\angle BAC) = 100^\circ$ implică $m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = 40^\circ$.

$[BD$ bisectoarea unghiului ABC $\Rightarrow m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle DBC) = 20^\circ$

$m(\sphericalangle BDC) = 120^\circ$, deci $m(\sphericalangle BDE) = m(\sphericalangle CDE) = 60^\circ$

Triunghiurile *ABD* şi *EBD* sunt congruente (U.L.U.), de unde rezultă *BA=BE*, deci triunghiul *BAE* este isoscel. Deducem $m(\sphericalangle BAE) = 70^\circ$ şi $m(\sphericalangle CAE) = 30^\circ$.

b) În $\triangle BEF$ avem $m(\sphericalangle FBE) = 40^\circ, m(\sphericalangle FEB) = 100^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BFE) = 40^\circ \Rightarrow \triangle BEF$ isoscel.

Barem:

a) $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = 40^\circ$	1p
$m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle DBC) = 20^\circ$	1p
$m(\sphericalangle BDE) = m(\sphericalangle CDE) = 60^\circ$	1p
Deduce $m(\sphericalangle CAE) = 30^\circ$	2p
b) $m(\sphericalangle FBE) = 40^\circ, m(\sphericalangle FEB) = 100^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BFE) = 40^\circ \Rightarrow \triangle BEF$ isoscel	2p

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.