COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”**
**- 23 mai 2015 -**

**CLASA a VII-a**

**1.** Să se determine numerele naturale *n*, ştiind că $a_n = 15^n + 17^n + 4$ este pătrat perfect.

*Dan Popescu, Suceava*

**2.** Fie numerele reale pozitive $a, b, c, d$ astfel încât $a + b = c + d$ şi $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$.

Arătaţi că $ab = cd$ şi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}$.

*Ion Bursuc, Suceava*

**3.** Dacă, în triunghiul *ABC*, punctul $M \in (AC)$, astfel ca $AM = MC$, punctul $L \in (BM)$, astfel ca $\frac{BL}{LM} = \frac{1}{2}$, iar $\{K\} = AL \cap BC$, atunci raportul ariilor triunghiurilor *ABK* şi *ABC* este $\frac{1}{5}$.

*Ana Marcela Popa, Rădăuţi*

**NOTĂ:** Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

**CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”**
**- 23 mai 2015 -**

**CLASA a VII-a**

**1.** Să se determine numerele naturale *n*, ştiind că $a_n = 15^n + 17^n + 4$ este pătrat perfect.

*Dan Popescu, Suceava*

**Soluţie:** Dacă $n \ge 2 \Rightarrow 15^n \vdots 9$, iar $17^n = M_9 + (-1)^n$. Astfel, pentru $n \ge 2, a_n$ este de forma $9a+3, a \in \mathbb{N}^*$ sau $9b+5, b \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că $a_n$ nu este pătrat perfect.
Astfel, $a_1 = 36$ este singura posibilitate.

**Barem:**

| | |
|---|---|
| $n \ge 2 \Rightarrow 15^n \vdots 9$, iar $17^n = M_9 + (-1)^n$. | 3p |
| $n \ge 2, a_n$ este de forma $9a+3, a \in \mathbb{N}^*$ sau $9b+5, b \in \mathbb{N}^*$, $a_n$ nu este pătrat perfect | 3p |
| $a_1 = 36$ este singura posibilitate | 1p |

**2.** Fie numerele reale pozitive $a,b,c,d$ astfel încât $a+b=c+d$ şi $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$.
Arătaţi că $ab=cd$ şi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$.

*Ion Bursuc, Suceava*

**Soluţie:** Relaţia $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$ se scrie astfel: $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}$ $(1)$. Observăm că egalitatea $a+b=c+d$ conduce, prin ridicare la pătrat la $a^2+b^2-(c^2+d^2)=2(cd-ab)$.
Presupunem că $ab \ne cd$. Folosind proprietăţile proporţiilor derivate obţinem:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{a^2b^2-c^2d^2}=\frac{2(cd-ab)}{(ab-cd)(ab+cd)}=\frac{-2}{ab+cd}<0,$$

ceea ce este fals. Contradicţia la care am ajuns arată că $ab=cd$ şi $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{c^2+d^2}{cd}$, de unde avem $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$.

**Barem:**

| | |
|---|---|
| Determină relaţia (1) | 1p |
| $a+b=c+d \Rightarrow a^2+b^2-(c^2+d^2)=2(cd-ab)$ | 2p |
| Demonstrează că $ab \ne cd$ duce la o contradicţie | 3p |
| Finalizare | 1p |

**3.** Dacă, în triunghiul $ABC$, punctul $M \in (AC)$, astfel ca $AM = MC$, punctul $L \in (BM)$, astfel ca $\frac{BL}{LM} = \frac{1}{2}$, iar $\{K\} = AL \cap BC$, atunci raportul ariilor triunghiurilor $ABK$ şi $ABC$ este $\frac{1}{5}$.

*Ana Marcela Popa, Rădăuţi*

**Soluţie:** Deoarece triunghiurile $ABK$ şi $ABC$ au aceeaşi înălţime din $A$, atunci raportul ariilor triunghiurilor $ABK$ şi $ABC$ este $\frac{BK}{BC}$. Construim $MS \| AK$, $S \in BC$. Deoarece $AM = MC \Rightarrow MS$ este linie mijlocie în $\Delta AKC$ deci: $KS = SC$. Aplicăm teorema lui Thales în $\Delta BMS \Rightarrow \frac{KS}{BK} = \frac{LM}{LB} = 2$. Obţinem $KS = 2BK \Rightarrow BC = 5BK \Rightarrow$ raportul ariilor triunghiurilor $ABK$ şi $ABC$ este $\frac{1}{5}$.

**Barem:**

| | |
|---|---|
| raportul ariilor triunghiurilor $ABK$ şi $ABC$ este $\frac{BK}{BC}$ | 2p |
| $MS \| AK$, rezultă $KS = SC$. | 2p |
| Deduce $\frac{KS}{BK} = \frac{LM}{LB} = 2$. | 2p |
| Obţinem $KS = 2BK \Rightarrow BC = 5BK$, de unde concluzia | 1p |