COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a VIII-a

1. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ şi $E=\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^4+1}{b^4+1}+\frac{a^4+2}{b^4+2}+\ldots+\frac{a^4+2015}{b^4+2015}$. Arătaţi că $E=2016$ dacă şi numai dacă $|a|=|b|$.

Vasile Solcanu,Bogdăneşti

2. a) Arătați că oricare ar fi $x, y, z, t\in\mathbb{R}$, are loc inegalitatea $|xz+yt|\le\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{z^2+t^2}$.

b) Dacă $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încât $x^2+y^2+6x-6y+10=0$, arătați că $|x+y|\le 4$.

Sascău Gabriela, Rădăuţi

3. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D, astfel ca $BC=CD=DB=a$ şi $AB=AC=AD=b$.

a) Să se demonstreze că $a<b\sqrt{3}$.

b) Să se demonstreze că distanţa dintre dreptele AB şi CD este $\frac{a}{2}$ dacă şi numai dacă $AB\perp AC\perp AD$.

Dan Popescu, Suceava

<u>NOTĂ:</u> Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a VIII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ şi $E = \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^4+1}{b^4+1} + \frac{a^4+2}{b^4+2} + \ldots + \frac{a^4+2015}{b^4+2015}$. Arătaţi că $E = 2016$ dacă şi numai dacă $|a| = |b|$.

Vasile Solcanu,Bogdăneşti

Soluţie: Scăzând câte un 1 din fiecare fracție și efectuând calculele obținem

$$E - 2016 = \left(a^4 - b^4\right)\left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^4+1} + \ldots + \frac{1}{b^4+2015}\right),$$

de unde $E = 2016 \Leftrightarrow a^4 = b^4 \Leftrightarrow |a| = |b|$.

Barem:

$E - 2016 = \left(a^4 - b^4\right)\left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^4+1} + \ldots + \frac{1}{b^4+2015}\right)$	5p
$E = 2016 \Leftrightarrow a^4 = b^4 \Leftrightarrow |a| = |b|$.	2p

2. a) Arătaţi că oricare ar fi $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $|xz + yt| \le \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}$.

b) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 10 = 0$, arătaţi că $|x + y| \le 4$.

Sascău Gabriela, Rădăuţi

Soluţie: a) Ridicând la pătrat inegalitatea obținem $x^2z^2 + 2xyzt + y^2t^2 \le x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2$, de unde $(xt - yz)^2 \ge 0$.

b) Egalitatea se poate scrie sub forma $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$. Folosind inegalitatea de la punctul a) avem $|x+y| = |(x+3)\cdot 1 + (y-3)\cdot 1| \le \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$.

Barem:

a) Demonstrarea cerinţei	3p
b) Demonstrarea cerinţei	4p

3. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D, astfel ca $BC = CD = DB = a$ şi $AB = AC = AD = b$.

a) Să se demonstreze că $a < b\sqrt{3}$.

b) Să se demonstreze că distanţa dintre dreptele AB şi CD este $\frac{a}{2}$ dacă şi numai dacă $AB \perp AC \perp AD$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie: a) Notăm O proiecţia punctului A pe planul (BCD) şi M mijlocul segmentului CD.

Deducem $AO^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} > 0$, de unde concluzia.

b) Fie N proiecţia punctului M pe AB. Obţinem $d(AB, CD) = MN = \frac{AO \cdot BM}{AB} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$.

Obţinem $MN = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow AB \perp AC \perp AD$

Barem:

a) Demonstrează cerinţa	3p
b) Justificare $d(AB, CD) = MN$	1p
Calculează MN	2p
Finalizare	1p

<u>**NOTĂ:**</u> Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.