COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a IX-a

1. Se consideră numerele reale $a>0$ şi $b\in\left(\frac{a}{2},a\right]$. Să se demonstreze:

a) $\frac{1}{x^2-ax+b^2}\le\frac{x+2b-a}{(2b-a)b^2},\forall x\in[0,\infty)$.

b) $\frac{1}{x^2-ax+b^2}+\frac{1}{y^2-ay+b^2}+\frac{1}{z^2-az+b^2}\le\frac{3}{(2b-a)b}$, $\forall x,y,z\in[0,\ \infty)$, satisfăcând $x+y+z=3(a-b)$. Când se obţine egalitatea?

Dan Popescu, Suceava

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$. Arătaţi că, dacă ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcinile numere întregi şi există $c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(c)=13$, atunci $\max\left(f(c-1),f(c+1)\right)=28$.

***

3. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}^*$ şi $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. Determinaţi tg$x$ ştiind că $(a\sin x+b\cos x)(c\sin x+d\cos x)=ac+bd$.

Ion Bursuc, Suceava

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a IX-a

1. Se consideră numerele reale $a>0$ şi $b\in\left(\frac{a}{2},a\right]$. Să se demonstreze:

a) $\frac{1}{x^2-ax+b^2}\leq\frac{x+2b-a}{(2b-a)b^2}, \forall x\in[0,\infty)$.

b) $\frac{1}{x^2-ax+b^2}+\frac{1}{y^2-ay+b^2}+\frac{1}{z^2-az+b^2}\leq\frac{3}{(2b-a)b}$, $\forall x,y,z\in[0,\ \infty)$, satisfăcând $x+y+z=3(a-b)$. Când se obţine egalitatea?

Dan Popescu, Suceava

Soluţie: a) Inegalitatea $\frac{1}{x^2-ax+b^2}\leq\frac{x+2b-a}{(2b-a)b^2}, \forall x\in[0,\ \infty)$ revine la $x(x+b-a)^2\geq 0$, $\forall x\in[0,\ \infty)$, deoarece $x^2-ax+b^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $(2b-a)b^2>0$.

b) Folosind punctul a) avem

$$\sum\frac{1}{x^2-ax+b^2}\leq\frac{\sum(x+2b-a)}{(2b-a)b^2}=\frac{3(a-b)+3(2b-a)}{(2b-a)b^2}=\frac{3}{(2b-a)b}.$$

Egalitatea în a) are loc pentru $x\in\{0,\ a-b\}$, dacă $a\neq b$.

$a=b\Rightarrow x=y=z=0$. Pentru $a\neq b$ şi $0\notin\{x,y,z\}$, deoarece $\frac{1}{b^2}<\frac{1}{(2b-a)b}$, egalitatea în enunţ se realizează pentru $x=y=z=a-b$ (condiţie necesară şi suficientă pentru egalitate şi în cazul $a=b$).

Barem:

a) Demonstrează inegalitatea	3p
b) Demonstrează inegalitatea	3p
Precizarea cazului de egalitate	1p

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. Arătaţi că, dacă ecuaţia $f(x)=0$ are rădăcinile numere întregi şi există $c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(c)=13$, atunci $\max\left(f(c-1),f(c+1)\right)=28$.

***

Soluţie: Fie $k,p\in\mathbb{Z}$ rădăcinile ecuaţiei, rezultă $k+p=-a, kp=b\Rightarrow a,b\in\mathbb{Z}$.

$f(c)=13\Leftrightarrow c^2+ac+b-13=0$. Discriminantul ecuaţiei este $\Delta=a^2-4b+52=(k-p)^2+52$

$c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(k-p)^2 + 52 = m^2 \Leftrightarrow (k-p-m)(k-p+m) = -52$. Singura posibilitate este $k - p \in \{\pm 12\} \Leftrightarrow |m| = 14$. În acest caz $c \in \left\{\dfrac{-a \pm 14}{2}\right\} \Leftrightarrow |2c+a| = 14$. Atunci $f(c+1) = 14 + 2c + a, f(c-1) = 14 - 2c - a \Rightarrow \{f(c+1), f(c-1)\} = \{0, 28\}$, de unde găsim că $\max(f(c+1), f(c-1)) = 28$.

Barem:

Fie $k, p \in \mathbb{Z}$ rădăcinile ecuației, rezultă $k + p = -a, kp = b \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$.	1p
$f(c) = 13 \Leftrightarrow c^2 + ac + b - 13 = 0$	1p
Deduce $k - p \in \{\pm 12\} \Leftrightarrow \lvert m\rvert = 14$.	2p
$c \in \left\{\dfrac{-a \pm 14}{2}\right\} \Leftrightarrow \lvert 2c+a\rvert = 14$	1p
$f(c+1) = 14 + 2c + a, f(c-1) = 14 - 2c - a \Rightarrow \max(f(c+1), f(c-1)) = 14 + 14 = 28.$	2p

3. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ şi $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Determinaţi $\mathrm{tg}x$ ştiind că $(a \sin x + b \cos x)(c \sin x + d \cos x) = ac + bd$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluţie: Egalitatea din enunţ este echivalentă cu:

$ac \cos^2 x - ad \cos x \sin x - bc \sin x \cos x + bd \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$(a \cos x - b \sin x)(c \cos x - d \sin x) = 0 \Rightarrow a \cos x - b \sin x = 0$ sau

$c \cos x - d \sin x = 0 \Rightarrow tgx = \dfrac{a}{b}$ sau $tgx = \dfrac{c}{d}$.

Barem:

$ac \cos^2 x - ad \cos x \sin x - bc \sin x \cos x + bd \sin^2 x = 0$	3p
$(a \cos x - b \sin x)(c \cos x - d \sin x) = 0$	2p
Finalizare	2p

<u>**NOTĂ:**</u> Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.