COLEGIUL NAŢIONAL „ŞTEFAN CEL MARE” SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a X-a

1. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,1)$ sau $a_1, a_2, ..., a_n \in (1,\infty)$, să se justifice inegalitatea:

$$\frac{\log_{a_1} a_2}{a_3} + \frac{\log_{a_2} a_3}{a_4} + ... + \frac{\log_{a_{n-1}} a_n}{a_1} + \frac{\log_{a_n} a_1}{a_2} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Dan Popescu, Suceava

2. Fie numerele $u, v, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .Arătaţi că are loc relaţia

$|z_1 + uz_2|^2 + |z_1 + vz_2|^2 = |z_1 - uz_2|^2 + |z_1 - vz_2|^2$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Re}\left((u+v)\overline{z}_1 z_2\right) = 0$.

Ion Bursuc, Suceava

3. În câte moduri pot fi colorate cele 10 pătrate de latură 1 ale unui dreptunghi 1×10 cu culorile albastru și galben astfel încât primul și ultimul pătrat să aibă aceeași culoare și să nu existe pătrate galbene alăturate.

Claudia Marchitan, Suceava

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.

Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a X-a

1. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,1)$ sau $a_1, a_2, ..., a_n \in (1,\infty)$, să se justifice inegalitatea:
$$\frac{\log_{a_1} a_2}{a_3} + \frac{\log_{a_2} a_3}{a_4} + ... + \frac{\log_{a_{n-1}} a_n}{a_1} + \frac{\log_{a_n} a_1}{a_2} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}.$$

Dan Popescu, Suceava

Soluţie: a) Se observă că suma din primul membru este minorată de
$$n \cdot \sqrt[n]{\frac{\lg a_2}{\lg a_1} \cdot \frac{\lg a_3}{\lg a_2} \cdot ... \cdot \frac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}} \cdot \frac{\lg a_1}{\lg a_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}},$$
iar $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

Barem:

Demonstrează $\frac{\log_{a_1} a_2}{a_3} + \frac{\log_{a_2} a_3}{a_4} + ... + \frac{\log_{a_{n-1}} a_n}{a_1} + \frac{\log_{a_n} a_1}{a_2} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 + a_2 + ... + a_n}}$	3p
$\frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 + a_2 + ... + a_n}}$	3p
Finalizare	1p

2. Fie numerele $u, v, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .Arătaţi că are loc relaţia
$|z_1 + uz_2|^2 + |z_1 + vz_2|^2 = |z_1 - uz_2|^2 + |z_1 - vz_2|^2$ dacă şi numai dacă $\text{Re}\left((u+v)\overline{z}_1 z_2\right) = 0$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluţie: Folosind proprietăţile modulului şi conjugatului obţinem:
$$|z_1 + uz_2|^2 + |z_1 + vz_2|^2 = (z_1 + uz_2)\left(\overline{z_1 + uz_2}\right) + (z_1 + vz_2)\left(\overline{z_1 + vz_2}\right) =$$
$$(z_1 + uz_2)(\overline{z}_1 + \overline{u} \cdot \overline{z}_2) + (z_1 + vz_2)(\overline{z}_1 + \overline{v} \cdot \overline{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\overline{u} \cdot \overline{z}_2 + uz_2\overline{z}_1 + |u|^2|z_2|^2 +$$
$$|z_1|^2 + z_1\overline{v} \cdot \overline{z}_2 + vz_2\overline{z}_1 + |v|^2|z_2|^2 = 2|z_1|^2 + \left(|u|^2 + |v|^2\right)|z_2|^2 + (u+v)z_2\overline{z}_1 + \overline{(u+v)z_2\overline{z}_1} =$$
$= 2|z_1|^2 + \left(|u|^2 + |v|^2\right)|z_2|^2 + 2\,\text{Re}\left((u+v)z_2\overline{z}_1\right)$.Prin urmare, are loc relaţia
$$|z_1 + uz_2|^2 + |z_1 + vz_2|^2 = 2|z_1|^2 + \left(|u|^2 + |v|^2\right)|z_2|^2 + 2\,\text{Re}\left((u+v)z_2\overline{z}_1\right) \quad (1)$$
Analog avem $|z_1 - uz_2|^2 + |z_1 - vz_2|^2 = 2|z_1|^2 + \left(|u|^2 + |v|^2\right)|z_2|^2 - 2\,\text{Re}\left((u+v)z_2\overline{z}_1\right)$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă concluzia.

Barem:

Deduce relaţia 1	3p
Deduce relaţia 2	3p
Finalizare	1p

3. În câte moduri pot fi colorate cele 10 pătrate de latură 1 ale unui dreptunghi 1×10 cu culorile albastru și galben astfel încât primul și ultimul pătrat să aibă aceeași culoare și să nu existe pătrate galbene alăturate.

Claudia Marchitan, Suceava

Soluţie: Notăm culorile celor 10 pătrate de latură 1, numerotate de la stânga la dreapta, cu $c_1, c_2, \ldots, c_{10} \in \{a, g\}$, unde prin $c_i = a$, (respectiv $c_i = g$) înțelegem că pătratul *i* este albastru (respectiv galben). Vrem să determinăm în câte moduri putem colora pătratele astfel încât $c_1 = c_{10}$ și nu există $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ cu $c_i = c_{i+1} = g$. Distingem două situații: $c_1 = c_{10} = a$ și $c_1 = c_{10} = g$.

În primul caz $c_1 = c_{10} = a$ constatăm că putem colora pătratele $2-9$ cu cele două culori având grijă să nu existe $i \in \{2, \ldots, 8\}$ cu $c_i = c_{i+1} = g$. Pentru aceasta considerăm cazul general a *n* pătrate și notăm cu x_n numărul de moduri în care pot fi colorate astfel încât să nu existe pătrate galbene alăturate. Observăm că $x_1 = 2$ (un pătrat poate fi colorat în două moduri – albastru sau galben), $x_2 = 3$ (putem colora $(a,a),(a,g),(g,a)$) și arătam că pentru $n \geq 3$ are loc egalitatea $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Fie $n \geq 3$. Dacă ultimul pătrat e colorat albastru ($c_n = a$) atunci celelalte $n-1$ pătrate pot fi colorate în x_{n-1} moduri (trebuie respectată numai condiția să nu existe pătrate galbene alăturate). Dacă ultimul pătrat e colorat galben ($c_n = g$) atunci $c_{n-1} = a$, iar celelalte $n-2$ pătrate pot fi colorate în x_{n-2} moduri, ceea ce conduce la $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall n \geq 3$. Găsim imediat $x_3 = 5, x_4 = 8, x_5 = 13, x_6 = 21, x_7 = 34$, de unde $x_8 = 55$.

În cazul $c_1 = c_{10} = g$ rezultă $c_2 = c_9 = a$, iar pătratele $3-8$ pot fi colorate în $x_6 = 21$ moduri, conform cazului anterior (trebuie respectată condiția de neexistență a pătratelor galbene alăturate). Obținem în final 76 de colorări ale dreptunghiului dat.

Barem:

Distinge două situații: $c_1 = c_{10} = a$ și $c_1 = c_{10} = g$.	2p
Găsește numărul de colorări în cazul $c_1 = c_{10} = a$	2p
Găsește numărul de colorări în cazul $c_1 = c_{10} = g$	2p
Finalizare: 76 colorări posibile	1p