COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ „CĂTĂLIN ȚIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a XI-a

1. Fie A şi B matrice pătratice de ordin doi, cu proprietatea că $AB = BA$.

a) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ şi $\det(A^2 + B^2) = 0$, să se arate că $tr(AB) = tr(A) \cdot tr(B)$;

b) Să se arate că există $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det(A^2 + B^2) = 0$ şi $tr(AB) \neq tr(A) \cdot tr(B)$.

Dan Popescu, Suceava

2. Găsiți funcțiile continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ce verifică $\sin f(x) + \cos f(x) = x\sqrt{2}, \forall x \in [-1,1]$.

Marius Marchitan, Suceava

3. Fie $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie derivabilă astfel încât $xf'(x) - f(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Arătaţi că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x > 0 \\ \lambda \quad , & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $[0, \infty)$.

Vladimir Cerbu şi Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

<u>NOTĂ:</u> Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

COLEGIUL
NAŢIONAL
„ŞTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ „CĂTĂLIN ŢIGĂERU”
- 23 mai 2015 -

CLASA a XI-a

1. Fie A şi B matrice pătratice de ordin doi, cu proprietatea că $AB = BA$.

a) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ şi $\det\left(A^2 + B^2\right) = 0$, să se arate că $tr(AB) = tr(A) \cdot tr(B)$;

b) Să se arate că există $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\det\left(A^2 + B^2\right) = 0$ şi $tr(AB) \neq tr(A) \cdot tr(B)$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie: a) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi orice $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ are loc egalitatea

$$\det(A + zB) = \det A + \left(tr(A)tr(B) - tr(AB)\right)z + (\det B)z^2 \overset{not}{=} P(z).$$

Atunci

$$\det\left(A^2 + B^2\right) = \det(A + iB)\det(A - iB) = P(i) \cdot P(-i) = \left|P(i)\right|^2 =$$
$$= \left(\det(A) - \det(B)\right)^2 + \left(tr(A)tr(B) - tr(AB)\right)^2.$$

Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci $\left(\det(A) - \det(B)\right)^2 \in \mathbb{R}_+$, $\left(tr(A)tr(B) - tr(AB)\right)^2 \in \mathbb{R}_+$, iar în ipoteza că $\det\left(A^2 + B^2\right) = 0$, obținem $\det(A) = \det(B)$ şi $tr(AB) = tr(A)tr(B)$.

b) Este suficient un exemplu cum este următorul: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Barem:

a) Obține $\det\left(A^2 + B^2\right) = \left(\det(A) - \det(B)\right)^2 + \left(tr(A)tr(B) - tr(AB)\right)^2$	2p
Deduce că $\det(A) = \det(B)$ şi $tr(AB) = tr(A)tr(B)$	2p
b) Exemplu şi verificare	3p

2. Găsiți funcțiile continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ce verifică $\sin f(x) + \cos f(x) = x\sqrt{2}, \forall x \in [-1, 1]$.

Marius Marchitan, Suceava

Soluţie: Împărțind egalitatea prin $\sqrt{2}$ obținem $\sin\left(f(x) + \dfrac{\pi}{4}\right) = x, \forall x \in [-1, 1]$. Deducem că pentru orice $x \in [-1, 1]$ avem $f(x) + \dfrac{\pi}{4} \in \{\arcsin x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Considerăm funcția $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \dfrac{\pi}{4}$, care este o funcție continuă. Pentru fiecare $k \in \mathbb{Z}$, notăm $U_k = \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $V_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$. Observăm că pentru orice $x \in (-1,1)$ și orice $k \in \mathbb{Z}$ avem $\arcsin x + 2k\pi \in U_k$, $\pi - \arcsin x + 2k\pi \in V_k$, iar $g(x) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (U_k \cup V_k)$. Deducem că $g((-1,1)) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (U_k \cup V_k) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Cum g este continuă pe $(-1,1)$, rezultă că $g((-1,1))$ este interval inclus în $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Prin urmare există $k_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $g((-1,1)) \subseteq U_{k_0}$ sau $g((-1,1)) \subseteq V_{k_0}$. În primul caz deducem că $g(x) = \arcsin x + 2k_0\pi, \forall x \in (-1,1)$, iar a doua situație conduce la $g(x) = \pi - \arcsin x + 2k_0\pi, \forall x \in (-1,1)$. Prelungind apoi prin continuitate în -1 și 1 funcția g, obținem că funcțiile f sunt cele de forma $f_k(x) = -\frac{\pi}{4} + \arcsin x + 2k\pi, \forall x \in [-1,1]$ sau $f_k(x) = \frac{3\pi}{4} - \arcsin x + 2k\pi, \forall x \in [-1,1]$, unde $k \in \mathbb{Z}$ este fixat.

Barem:

Obține $\sin\left(f(x) + \frac{\pi}{4}\right) = x, \forall x \in [-1,1]$	2p
Deduce $f(x) + \frac{\pi}{4} \in \{\arcsin x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	1p
Există $k_0 \in \mathbb{Z}$ astfel ca $g((-1,1)) \subseteq U_{k_0}$ sau $g((-1,1)) \subseteq V_{k_0}$	2p
$g(x) = \arcsin x + 2k\pi, \forall x \in [-1,1]$ sau $g(x) = \pi - \arcsin x + 2k\pi, \forall x \in [-1,1]$	1p
Soluțiile sunt funcțiile de forma $f_k(x) = -\frac{\pi}{4} + \arcsin x + 2k\pi, \forall x \in [-1,1]$ sau $f_k(x) = \frac{3\pi}{4} - \arcsin x + 2k\pi, \forall x \in [-1,1]$, $k \in \mathbb{Z}$ fixat.	1p

3. Fie $f:(0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie derivabilă astfel încât $xf'(x) - f(x) \geq 0$, $\forall x \in (0,\infty)$. Arătați că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x > 0 \\ \lambda, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $[0,\infty)$.

Vladimir Cerbu și Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie: Considerăm funcția $H:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $H(x) = \frac{f(x)}{x}$. Funcția H este derivabilă şi $H'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0$, $\forall x \in (0,\infty)$, deci H este funcție crescătoare. Atunci H are limită la dreapta în 0 şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} H(x) = \alpha \in [0,\infty)$. Din ipoteză avem $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x} \geq 0$, $\forall x \in (0,\infty)$ şi de aici obţinem că f este funcție crescătoare. Atunci f are limită la dreapta în 0 şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = l \in [0,\infty)$. Dacă $l \in (0,\infty)$ atunci $\alpha = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} H(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \frac{l}{0_+} = \infty$, absurd.

Prin urmare $l=0$. Considerăm funcţia $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } x>0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$. Evident funcția F este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $F'(x)=f'(x), \forall x\in(0,\infty)$. De asemenea, observăm că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x}=\alpha\in[0,\infty)$ adică F este derivabilă în 0 și $F'(0)=\alpha$. În concluzie, funcția F este derivabilă pe $[0,\infty)$.

Barem:

Există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} H(x)=\alpha\in[0,\infty)$, unde $H:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $H(x)=\frac{f(x)}{x}$	2p
Există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=l\in[0,\infty)$	2p
Obține $l=0$	2p
Finalizare $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } x>0 \\ 0, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$ derivabilă pe $[0,\infty)$	1p

<u>NOTĂ:</u> Timpul efectiv de lucru este de 2,5 ore.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.