

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 6$ și $a_4 = 8$.
- 5p 2. Determinați valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 3} = x + 1$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(0,3)$. Determinați ecuația dreptei AB .
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 8$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(B(x) + I_2) = 8$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 7x - 7y + 56$.
- 5p a) Arătați că $(-7) * 7 = 7$.
- 5p b) Arătați că $x * y = (x - 7)(y - 7) + 7$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Calculați $1 * 2 * 3 * \dots * 2015$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + x$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{3}{2}$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x) dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$.
- 5p c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_4 - a_3 = 8 - 6 =$ $= 2$	3p 2p
2.	Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a} =$ $= -\frac{36}{4} = -9$	2p 3p
3.	$x^2 + 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 3 = 2x + 1$ $x = 1$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} =$ $= 21$	3p 2p
5.	$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{0-2}$ $y = -x + 3$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} =$ $= 8$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 =$ $= 4 - 6 = -2$	3p 2p
b)	$B(x) + I_2 = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(x) + I_2) = 7x + 1$ $7x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 1$	3p 2p
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix}$ $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3$	2p 2p 1p
2.a)	$(-7) * 7 = (-7) \cdot 7 - 7 \cdot (-7) - 7 \cdot 7 + 56 =$ $= -49 + 49 - 49 + 56 = 7$	3p 2p
b)	$x * y = xy - 7x - 7y + 49 + 7 =$ $= x(y-7) - 7(y-7) + 7 = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p

c)	$x * 7 = 7$ și $7 * y = 7$, pentru x și y numere reale	2p
	$1 * 2 * 3 * \dots * 2015 = (1 * 2 * \dots * 6) * 7 * (8 * 9 * \dots * 2015) = 7 * (8 * 9 * \dots * 2015) = 7$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$	2p
	$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} + 1$ și $f'(1) = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e$	3p
b)	$f(1) = e + 1, f'(1) = e$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y = ex + 1$	3p
c)	$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	2p
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$	2p
b)	$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x + 1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x + 1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x + 1) \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln 2$	2p
c)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \pi \cdot \frac{-1}{x + 1} \Big _0^1 =$	3p
	$= \pi \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2}$	2p