



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE  
Inspectoratul Școlar Județean Cluj  
Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Concursul Interjudețean de Matematică  
„Dumitru Țiganetea”  
Ediția a XV-a, 23 mai 2015

Clasa a IV -a

1. a) Efectuați  $50 + 225 : 5 \times \{ [ 824 : 4 - 90 : 3 + (324 \times 0 + 64 : 2) : 8 ] : 18 \} + 99 : 9 \times 9 - 66 : 6 \times 6$   
b) Determinați termenul necunoscut din egalitatea

$$2015 - \{ 2015 : 5 - (x - 5) : 5 \} = 2014$$

*Prof. Zoltan Fodor, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

2. Aflați numărul cifrelor numărului  $A = 18288388848888 \dots 2015$ .

*Prof. Corina Dragos, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

*Prof. Alina Galdean, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

3. Să se arate că numărul 2025 se poate scrie ca suma a trei termeni astfel încât fiecare termen să fie cu 2 mai mare decât triplul numărului precedent.

*Prof. Anca Cristina Hodorogea, ISJ Cluj*

4. Se consideră șirul:  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  Al câtelea termen al șirului este  $\frac{21}{35}$  ?

*Prof. Vasile Serdean, Sc. Gimn. nr. 1 Gherla*

*Prof. Camelia Magdas, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE  
Inspectoratul Școlar Județean Cluj  
Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Concursul Interjudețean de Matematică  
„Dumitru Țiganetea”  
Ediția a XV-a, 23 mai 2015

Clasa a V - a

1. a) Să se calculeze  $\left[ (3^2)^2 \right] : 3^{2^2} \cdot (2^3 + 2^0) : (37 \cdot 10^2 - 3673) : (10^3 - 3^2 \cdot 111)$

b) Arătați că numărul  $N = 2014 + \overline{abc6} + \overline{bca7} + \overline{cab8}$  este divizibil cu 185, oricare ar fi  $a, b, c$  cifre nenule în baza 10.

*Prof. Aura Bujă, Lic. Teoretic "Petru Maior" Gherla*

2. Calculați suma  $S = 6 + 92 + 988 + \dots + \underbrace{999\dots600}_{100 \text{ cifre}}$

*Prof. Camelia Magdas, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

3. Să se arate că numărul  $A = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2014 \cdot 2015}{1^2 + 2^2 + \dots + 1007^2}$  este cub perfect.

*Prof. Pop Cristian, ISJ Cluj*

*Prof. Corina Dragos, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

4. Pe o tablă sunt scrise numerele: 1, 2, 3, ..., 2014, 2015. Ștergem două numere și în locul lor scriem restul împărțirii sumei lor la 31.

După câțiva pași rămân scrise pe tablă două numere, dintre care unul este 899.

Care este cel de-al doilea număr dintre cele două rămase pe tablă (Justificați)

*Prof. Vasile Serdean, Sc. Gimn. nr. 1 Gherla*

*Prof. Eugen Jecan, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE  
Inspectoratul Școlar Județean Cluj  
Colegiul Național „Andrei Mureșanu” Dej

Concursul Interjudețean de Matematică  
„Dumitru Țiganetea”  
Ediția a XV-a, 23 mai 2015

Clasa a VI – a

1. a) Să se calculeze valoarea lui  $x$  din proporția:

$$\frac{1+2+\dots+2016}{2016-2015+2014-2013+\dots+4-3+2-1} = \frac{x}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016}}$$

și să se determine partea întreagă a lui  $x$ .

b) La Concursul Interjudețean “Dumitru Țiganetea”, toți elevii au fost recompensați astfel: 10% din numărul concurenților au primit premiul I; 20% din restul concurenților au primit premiul II; 25% din rest au primit premiul III, 36 de elevi au primit mențiuni și ultimii 45 au primit diplomă de participare.

- Câți elevi au fost la concurs?
- Câți elevi au primit premiul I?

*Prof. Alina Galdean, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

*Prof. Corina Dragos, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

2. Fie triunghiul isoscel ABC cu  $[AB] \equiv [AC]$  și  $m(\sphericalangle A) = 40^\circ$ . Se consideră punctele

$D \in (AB)$  astfel încât  $m(\sphericalangle BCD) = 55^\circ$  și  $E \in (AC)$  astfel încât  $m(\sphericalangle DBE) = 30^\circ$ .

Să se arate că :

- Triunghiul BCD este isoscel
- Triunghiul BCE este isoscel
- Calculați măsura unghiului EDC.

*Prof. Aura Buju, Lic. Teoretic “Petru Maior” Gherla*

*Prof. Eugen Jecan, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

3. Se consideră triunghiul ABC cu  $m(\sphericalangle ABC) > 90^\circ$ . Pe mediana AM se consideră punctul R astfel încât  $AR = 10$ . Dacă  $BE \perp AM$ ,  $E \in AM$  și  $ME = 5$ . Să se arate că  $[AB] \equiv [RC]$ .

*Prof. Zoltan Fodor, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

4. Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere naturale astfel încât  $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ . Să se arate că

$a$  se divide cu 3023.

*Prof. Vasile Serdean, Sc. Ginn. nr. 1 Gherla*

*Prof. Camelia Magdas, Col. Nat. „Andrei Muresanu” Dej*

Barem Clasa a IV – a

1.

(4 pct) a) 533

(3 pct) b)

$$2015 : 5 - (x - 5) : 5 = 1$$

$$403 - (x - 5) : 5 = 1$$

$$(x - 5) : 5 = 402,$$

$$x = 2015$$

2.

(2 pct) După 1 apare o cifră de 8, după 2 apar 2 cifre de 8, după 3 apar 3 cifre de 8, ..., după 2014 apar 2014 cifre de 8

(1 pct) Atunci numărul cifrelor de 8 este  $1 + 2 + 3 + \dots + 2014 = (2014 \cdot 2015) : 2 = 2029105$

(1 pct) De la 1 la 9 sunt 9 cifre

(1 pct) De la 10 la 99 sunt  $90 \cdot 2 = 180$  cifre

(1 pct) De la 100 la 999 sunt  $900 \cdot 3 = 2700$  cifre

(1 pct) De la 1000 la 2015 sunt  $1016 \cdot 4 = 4064$  cifre. Prin urmare numărul cifrelor lui A este

(1 pct)  $2029105 + 9 + 180 + 2700 + 4064 = 2036058$

3.

(1 pct) Fie  $x$  cel mai mic dintre numere. Al doilea este  $3x + 2$ ,

(2 pct) Al treilea număr este  $3 \cdot (3x + 2) + 2 = 9x + 8$ .

(3 pct) Suma lor este  $x + (3x + 2) + (9x + 8) = 2025$ .  $13x + 10 = 2025$ .  $x = 155$

(1 pct) Numerele sunt 155,  $155 \cdot 3 + 2$ ,  $9 \cdot 155 + 8$ , adică 155, 467, 1403

4.

(2 pct) Grupăm termenii șirului, astfel încât în fiecare grupă să intre fracțiile pentru care suma dintre numărător și numitor este aceeași.

(1 pct) Prima grupă conține  $\frac{1}{1}$ , a doua  $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$ , a treia  $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

(1 pct) Termenul  $\frac{21}{35}$  se află în grupa pentru care suma dintre numărător și numitor este  $21 + 35 = 56$

(2 pct) Până la această grupă sunt:  $1 + 2 + 3 + \dots + 54 = (54 \cdot 55) : 2 = 1485$  termeni.

(1 pct) Termenul  $\frac{21}{35}$  ocupă în grupa din care face parte locul 35. În șirul considerat termenul  $\frac{21}{35}$  ocupă locul

$1485 + 35 = 1520$ .

1.

*(3 pct)* a) Rezultatul este  $3^3$ .

b) Folosind descompunerea în baza 10, avem:

*(3 pct)*  $N = 2014 + 1000a + 100b + 10c + 6 + 1000b + 100c + 10a + 7 + 1000c + 100a + 10b + 8.$

*(1 pct)*  $N = 2035 + 1110(a + b + c) = 185 \cdot (11 + 6a + 6b + 6c) : 185$

2.

*(4 pct)* Observăm că  $6 = 10 - 4 \cdot 1;$   
 $92 = 100 - 4 \cdot 2$   
 $998 = 1000 - 4 \cdot 3$

 $\vdots$ 

*(3 pct)* Deci  $S = 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{10\dots0}_{100} - 4(1 + 2 + \dots + 100) = \underbrace{11\dots0}_{100} - 20200 = \underbrace{111\dots1090910}_{100}$

3.

*(4 pct)* Numărătorul are 2014 termeni pe care îi grupăm câte doi astfel:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2(1 + 3) = 2 \cdot 2^2$

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 4(3 + 5) = 2 \cdot 4^2$

$5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 6(5 + 7) = 2 \cdot 6^2$

.....

$2013 \cdot 2014 + 2014 \cdot 2015 = 2 \cdot 2014^2$

*(3 pct)* Atunci  $A = \frac{2 \cdot (2^2 + 4^2 + \dots + 2014^2)}{1^2 + 2^2 + \dots + 1007^2} = \frac{2 \cdot 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 1007^2)}{1^2 + 2^2 + \dots + 1007^2} = 8$

4.

*(1 pct)* Suma  $1 + 2 + 3 + \dots + 2015 = 2015 \cdot 1008$  este divizibilă cu 31. ( $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ ).*(3 pct)* Prin ștergerea a două numere și înlocuirea lor cu restul împărțirii la 31, ceea ce nu se modifică este restul împărțirii sumei lor la 31. ( $x + y = 31q + r$ ).*(1 pct)* Prin ștergere, obținem:

$1 + 2 + \dots + 2015 - (x + y) + r = 2015 \cdot 1008 - (31 \cdot q + r) + r = 31 \cdot (5 \cdot 13 \cdot 1008 - q) : 31$ , atunci și suma ultimelor două numere rămase se divide cu 31.

*(1 pct)* Dacă  $a$  și 899 sunt ultimele două numere rămase, cum 899 se divide cu 31, trebuie ca și  $a$  să se dividă cu 31.*(1 pct)* Numărul 899 nu poate fi rest la împărțirea cu 31, atunci  $a$  trebuie să fie acest rest și deci  $a \in \{0, 1, 2, \dots, 30\}$ .Deoarece  $a$  se divide cu 31, deducem că  $a = 0$ .

1.

a)

$$(0.5 \text{ pct}) 1 + 2 + \dots + 2016 = 2017 \cdot 1008$$

$$(0.5 \text{ pct}) 2016 - 2015 + 2014 - 2013 + \dots - 4 - 3 + 2 - 1 = 1008$$

$$(1 \text{ pct}) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} = \frac{2015}{2016}$$

$$\text{Aflarea lui } (2 \text{ pct}) x = \frac{2015 \cdot 2017}{2016}. \text{ Finalizare } (1 \text{ pct}) [x] = 2015.$$

b) Fie  $x$  numărul de elevi participanți.

$$(0.5 \text{ pct}) \text{ Prima zi } \frac{1}{10} x$$

$$(0.5 \text{ pct}) \text{ A doua zi } \frac{9}{50} x$$

$$(0.5 \text{ pct}) \text{ A treia zi } \frac{9}{50} x$$

$$(1 \text{ pct}) \frac{1}{10} x + \frac{9}{50} x + \frac{9}{50} x + 51 = x$$

$$(1 \text{ pct}) x = 150 \text{ participanți}$$

$$(0.5 \text{ pct}) 15 \text{ elevi au luat premiul I}$$

2.

$$(1 \text{ pct}) m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 70^\circ$$

$$(2 \text{ pct}) m(\sphericalangle BDC) = 55^\circ = m(\sphericalangle C) \text{ de unde triunghiul BCD isoscel. (1)}$$

$$(2 \text{ pct}) m(\sphericalangle EBC) = 40^\circ, m(\sphericalangle BEC) = 70^\circ = m(\sphericalangle C) \text{ de unde triunghiul BCE isoscel. (2)}$$

$$(1 \text{ pct}) \text{ Din (1) și (2) obținem că triunghiul BDE isoscel, deci } m(\sphericalangle BDE) = 75^\circ.$$

$$(1 \text{ pct}) \text{ Astfel } m(\sphericalangle EDC) = 20^\circ.$$

3.

(1 pct) Fie  $F \in (AM)$  astfel încât  $E$  să fie mijlocul segmentului  $MF$ .

$$(2 \text{ pct}) \text{ Atunci } EF = 5 \text{ și deducem că triunghiul BFM isoscel cu } [BM] \equiv [BF]$$

$$(2 \text{ pct}) \text{ Deducem că } m(\sphericalangle BFM) = m(\sphericalangle BMF), \text{ de unde } m(\sphericalangle AFB) = m(\sphericalangle CMR).$$

$$(2 \text{ pct}) \text{ Din congruența } \triangle ABF \equiv \triangle RCM (LUL) \text{ deducem } [AB] \equiv [RC]$$

4.

(4 pct)

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014} \right) \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1007} \right) = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \dots + \frac{1}{2015} = \\ & = \left( \frac{1}{1008} + \frac{1}{2015} \right) + \left( \frac{1}{1009} + \frac{1}{2014} \right) + \dots + \left( \frac{1}{1511} + \frac{1}{1512} \right) = \\ & = 3023 \cdot \left( \frac{1}{1008 \cdot 2015} + \frac{1}{1009 \cdot 2014} + \dots + \frac{1}{1511 \cdot 1512} \right) \end{aligned}$$

$$(1 \text{ pct}) \text{ Aducând la același numitor, putem scrie } \frac{a}{b} = \frac{3023 \cdot x}{1008 \cdot 1009 \cdot \dots \cdot 2015}, x \in \mathbb{N}. (1 \text{ pct})$$

(2 pct) Deoarece 3023 număr prim și c.m.m.m.c-ul factorilor de la numitor nu este multiplu de 3023, deducem că  $a$  se divide cu 3023.