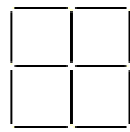
Matematică de vacanță

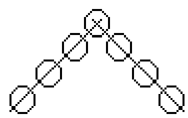
Gheorghe Crăciun

PROBLEME

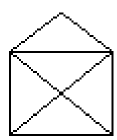
Din **12 beţişoare** sunt compuse 5 pătrate. Înlăturaţi 2 beţişoare astfel, încât să rămână numai două pătrate de dimensiuni diferite.

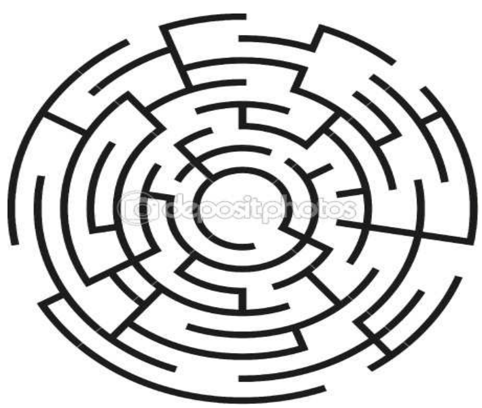


Înscrieţi în **cerculeţele de pe desen** numere de la 1 până la 7 astfel încât, pe fiecare dreaptă suma numerelor să fie egală cu 15. (soluţia problemei nu este unică)



Desenaţi acest **plic** fără a ridica creionul de pe hârtie (fără întrerupere).





ŞTIATI CĂ…

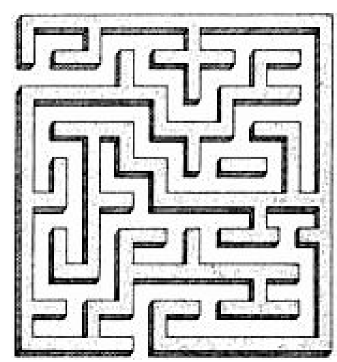
... Numele continentului **Europa** provine din cuvântul fenician „ereb”, adică „apus de soare” .

…Ciocul unei **ciocănitoare** loveşte un arbore cu viteza de 20 Km/h?

…Cu o lungime totală de aproximativ 2.850 kilometri, **Dunărea** este al doilea fluviu ca lungime din Europa (după Volga, Rusia, 3.690 km) şi al 29-lea din lume? Având în vedere că Volga străbate doar Rusia, ţara nemembră UE, Dunărea este cel mai lung fluviu din Uniunea Europeană.

... Fără scurgere în Oceanul Planetar, **Marea Caspică** este şi cel mai mare lac al planetei (371800 km).

... **Parisul** a devenit capitală a Franţei încă din anul 1000. El este situat pe râul Sena, pe locul vechii aşezări Luteţia



PROBLEME

Supuşii unui sultan, gândindu-se că nu s-o prinde nimeni, au înlocuit unul din **sacii de galbeni** luaţi drept bir din… să zicem Moldova, cu unul de bani falşi. Să zicem că sunt zece saci cu totul. E de la sine înţeles că se ştie cât cântăreşte o monedă adevărată; să spunem 10 grame. Ştiindu-se că banii falşi sunt cu 1 gram mai uşori decât cei adevăraţi, care este metoda prin care îţi poţi da seama din care sac s-a furat, folosindu-te de o singură cântărire?

Trei colege, Maria, Olivia şi Iulia, doresc să stea câte două în bancă. În câte moduri se pot aşeza?

PARADOXUL FRIZERULUI

(PARADOX = SITUAŢIE IMPOSIBILĂ, CONTRADICTORIE)

- Într-un sat, există un frizer care-i rade pe toţi locuitorii satului care nu se rad singuri.

Întrebare: El poate să se radă pe el însuşi? Dacă se rade, înseamnă că el este un locuitor care se rade singur, deci frizerul nu are voie să-l radă, deci nu se rade. Dar dacă nu se rade, atunci el este un locuitor care nu se rade singur, deci frizerul trebuie să-l radă. Aşadar, frizerul nostru se rade singur şi, totodată, nu se rade singur – ceea ce este imposibil!

ŞTIAŢI CĂ…

…După ce şi-a scrântit piciorul la 65 de ani, **Grigore Moisil** a afirmat: "Ştiam că la vârsta mea te scrânteşti la cap, nu la picior."

... **Vaticanul** este cel mai mic stat de pe Glob (0,44 kmp) – de fapt el este un cartier din nord-vestul Romei.

…În vârstă de 33 de ani, orice fiinţă a trăit doar un miliard de secunde.

... Pentru a obţine un gram de venin sunt necesare peste 10 000 de albine.

... Cel mai mic mamifer din lume este şoarecele cu bot ascuţit.

... Girafa nu are corzi vocale şi nu scoate nici un sunet.

... Cea mai mică pasăre din lume este zâna bondarilor cu 1,6g greutate.

... Cele mai lente păsări sunt vrăbiile.

- Ţi-am citit lucrarea de control. Foarte bună, dar e identică cu a colegului tău de bancă. Ce concluzie să trag de aici? întrebă profesorul.
- Că şi lucrarea lui este foarte bună.

În câte moduri pot fi aşezate **trei pălării** de culori diferite pe trei cuiere?

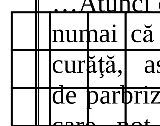
... Deschis publicului în 1793, **Muzeul Louvre** a fost construit timp de peste 600 ani şi adăposteşte peste 200000 colecţii de artă

Schimbaţi poziţia unui singur **beţişor**, astfel încât egalităţile să devină adevărate:

a) VI – V = I + I
b) II = II - I
c) V – V = II
d) III – II = IV
e) X – X = XIX
f) VI – IV = L
g) XI + I = X
h) L – II = LI
i) XXXIX = XXXVIII - II

O furnică pleacă din punctul A.
Pentru a ajunge în vârful B va merge doar pe laturile pătrăţelelor din desenul alăturat care au lungimea de 2 cm.
Care este lungimea celui mai scurt drum posibil?

B



A

…Marele scriitor irlandez **George Bernard Shaw** a fost invitat ca punct de atracţie la masa unor aristocraţi.
Amfitrioana, cunoscută pentru inteligenţa sa cam şubredă, făcu imprudenţa să-l întrebe:
- Spuneţi-mi, vă rog, am auzit că peştele regenerează materia cenuşie. Ce peşte mă sfătuiţi să consum ?
- Balena ! - răspunse prompt Shaw.

…Atunci când clipim, pleoapa nu numai că apară ochiul, dar îl şi curăţă, asemenea ştergătoarelor de parbriz, de praf şi impurităţile care pot vătăma şi îmbolnavi ochiul.

$1 \times 9 + 2 = 11$
$12 \times 9 + 3 = 111$
$123 \times 9 + 4 = 1111$
$1234 \times 9 + 5 = 11111$
$12345 \times 9 + 6 = 111111$
$123456 \times 9 + 7 = 1111111$
$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$
$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$
$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$

O lege a statului Iowa cere pompierilor ca înainte de a pleca la stingerea unui incendiu să facă un antrenament de cinsprezece minute.

Proprietarul unui depozit de vinuri a lăsat prin testament celor trei feciori ai săi **21 de butoaie** de aceiaşi capacitate, dintre care 7 erau pline cu vin, 7 erau pe jumătate pline, iar 7 erau goale. Se cere să se împartă această avere la cei trei fii, astfel încât fiecare să primească aceiaşi cantitate de vin şi acelaşi număr de butoaie (7), fără să folosim vreo metodă de măsurare.
Problema are mai multe soluţii.
Găsiţi una!

…Zonele polare sunt acoperite de zăpezi şi gheţuri veşnice. Locuitorii de la poli (eschimoşii) s-au adaptat condiţiilor oferite de mediile în care traiesc, locuiesc în case de gheaţă numite "iglu", se hrănesc cu carne şi grăsime de urs, focă şi peşte, pe care le vânează, îşi

Într-o cuşcă se află **iepuri de casă şi prepeliţe**, în total 100 picioare şi 36 capete. Câţi iepuri şi câte prepeliţe sunt?

Construiţi o **frază în limba română**, de minim 10 cuvinte, în care toate cuvintele să înceapă cu aceeaşi literă.
De exemplu, fraza următoare are 14 cuvinte, toate începând cu litera „f”:
"Floarea, fata fostului funcţionar Fane Frunzăvede fierbe fasole fără foc fiindcă focul face fum."

confecţionează îmbrăcămintea din blănurile animalelor vânate şi se deplasează cu ajutorul săniilor trase de câini sau reni.

... Ochiul unui om poate distinge peste 150 de nuanţe de culori.

... Pasarea colibri este o adevărată bijuterie a naturii datorită penajului ei deosebit de frumos? Trăieşte în diferite zone, din Alaska până în Ţara de Foc şi de la coastele oceanului până la înălţimile Anzilor.

Extras din legile elevului
1. Elevul nu copiază niciodată, consultă.
2. Elevul nu chiuleşte, este solicitat în alte părţi.
3. Elevul nu rămâne corigent, este lăsat corigent.
4. Elevul nu fumează, se stimulează.
5. Elevul nu întârzie niciodată, el este reţinut.
6. Elevul nu citeşte reviste în timpul orelor, se informează.
7. Elevul nu distruge şcoala, o redecorează.
8. Elevul nu aruncă cu creta, studiază legea gravitaţiei.
9. Elevul nu râde în ore, e fericit.

O florăreasă îşi vinde florile după o regulă bizară. Un crin costă 8 lei, în timp ce o dalie costă 10 lei.
O frezie costă 12 lei, iar o tuberoză 16 lei.
Urmând aceeaşi logică, cât costă un trandafir ?

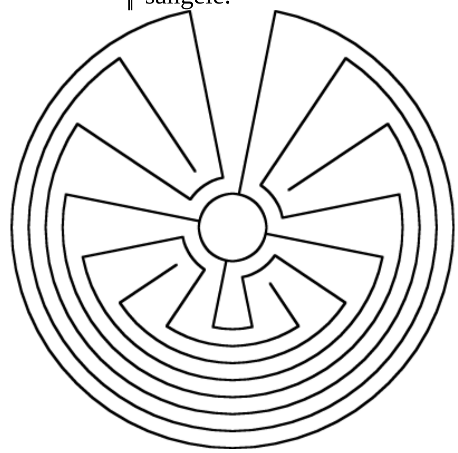
Într-un **acvariu** erau 15 peşti, unii mari şi alţii mici. Fiecare peşte mare înghite câte 2 peşti mici astfel încât toţi peştii mici sunt înghiţiţi. Câţi peşti mari sunt în acvariu?

Profesorul Baltazar povesteşte prietenilor săi:
Iată ce mi s-a întâmplat în 1932. Atunci aveam exact atâţia ani câţi exprimau ultimele două cifre ale anului meu de naştere. I-am împărtăşit aceasta bunicului meu, care m-a uimit că şi cu vârsta lui s-a întâmplat exact acelaşi lucru, adică şi el avea atunci atâţia ani câţi exprimă ultimele două cifre ale anului naşterii sale.
Câţi ani avea fiecare dintre noi în 1932?

... În fiecare dimineaţă căluţii de mare au un “randez-vous”, atunci ei încep un dans graţios, care se repetă zilnic, timp de o viaţă?

... Un fir de păianjen care ar înconjura globul ar cântări cca 300g.

... Liliacul vampir are aria de răspândire din Mexic până în Paraguay. Se hrăneşte cu sângele unor animale. Atacă noaptea victimele, animale sau oameni, provocându-le răni. Acţionează atât de repede încât omul adesea nici nu sesizează momentul mușcăturii. Stomacul şi dentiţia lor sunt adaptate acestui mod de a se hrăni, incisivii şi caninii îi permit să facă o gaură mică în pielea victimei prin care suge sângele.



Găsiţi un **număr de cinci cifre**, cu proprietatea ca fiecare cifră a numărului să fie mai mare decât suma cifrelor din dreapta lui.

Când face ciorbă, Veronica pune câte 4 **boabe de mazăre** pentru fiecare bob de fasole. În total a pus 15 de boabe. Câte din ele sunt de mazăre?

Un zidar are 8 cărămizi. Şapte din ele au aceiaşi greutate, iar una este puţin mai grea decât celelalte. Zidarul dispune de o balanţă.

Poate el depista **cărămida mai grea**, folosind numaidouă cântăriri ?
Cum ?

Un grup de **100 de turişti** au plecat la începutul verii în străinătate. Zece dintre aceştia nu ştiau nici limba franceză, nici limba engleză. 75 ştiau limba franceză, iar 83 ştiau limba engleză. Câţi turişti ştiau ambele limbi?

…Atunci când sunt încolţite, unele **şopârle** îşi pot pierde o bucată din coadă, aceasta crescând la loc după câteva luni de zile.

…**Ariciul** hibernează, adică doarme în vizuina lui din octombrie până în aprilie.

…**Peştii buzaţi** trăiesc în mările nordice? Femela îşi lasă ouale în apa, iar masculul le adăposteşte în gură. Aici, ele se transformă în peştişori care ies din gura tatălui pentru scurt timp, să mănânce, apoi se întorc la adapost. În această perioadă peştele nu se hrăneşte.

…Toate plantele, care astăzi transformă grădinile noastre şi peisajele de la ţară sau facparte din hrana noastră s-au dezvoltat din plante care trăiau în oceane,

PROBLEME REZOLVATE
Gheorghe Crăciun

CLASA a V-a

1 Un număr natural este ,,prieten'' cu 2014 dacă restul şi câtul împărţirii lui 2014 la acesta sunt egale. Câţi ,,prieteni'' are 2014?

Gheorghe Crăciun, O.L.M Prahova

Rezolvare

Observăm că $2014 = 1 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ Avem $2014 = r \cdot i + r, r < i$ adică 2014=r(i+1)

Pentru r=1 obţinem i=2013
Pentru r=2 obţinem i=1006
Pentru r=19 obţinem i=105
Pentru r=38 obţinem i=52 Restul valorilor lui r (19,53,106,2014)nu convin deoarece nu este îndeplinită şi condiţia r<i.

---

2 *Să se scrie în ordine crescătoare numerele:*

$a = 3^{2010} - 2 \cdot 3^{1209}$; $b = 2^{2017} - 2^{2016} - 2^{2015}$; $c = 5^{807} - 4 \cdot 5^{806}$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

$a = 3^{2019} \cdot (3 - 2) = 3^{1209} = 3^{3 \cdot 403} = (3^3)^{403} = 27^{403}$;
$b = 2^{2015} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{2015} = 2^{5 \cdot 403} = (2^5)^{403} = 32^{403}$;
$c = 5^{806} \cdot (5 - 4) = 5^{806} = 5^{2 \cdot 403} = (5^2)^{403} = 25^{403}$.
Prin urmare c < a < b

---

3 *Diferenţa a două numere este 315. Să se determine cele două numere ştiind că unul este cu 3715 mai mic decât triplul celuilalt.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Dacă a şi b sunt cele două numere, din ipoteză avem că a – b = 315 adică a = b + 315.**(1)**

I. Dacă a = 3b – 3715, ţinând seama de **(1)** se găseşte că
3b - 3715 = b + 315, de unde
2b = 4030, şi prin urmare b = 2015 iar a = 2330.

II. Dacă b = 3a – 3715, atunci înlocuind în **(1)** se obţine
a = 3a – 3715 + 315, de unde

3715 – 315 = 3a – a, adică 3400 = 2a şi prin urmare a = 1700 iar b = 1385

---

4 *Arătaţi că numărul* $A = 1991^1 + 1992^2 + \ldots + 1995^5$ *nu este pătrat perfect.*

***

Soluţie:

Aflăm ultima cifră a fiecărui termen

$U(1991^1)=1$

$U(1992^2)=U(2^2)=4$

$U(1993^3)=U(3^3)=7$

$U(1994^4)=U(4^4)=6$

$U(1995^5)=U(5^5)=5$

Obţinem U(A)=U(1+4+7+6+5)=U(23)=3 $\Rightarrow$ A nu este pătrat perfect.

5 *Determinaţi cifrele a si b astfel încât* $\overline{ab6}=2^{a+b+1}$

O.L.M. 2010, Olt, Dan Coma

Soluţie:

Deoarece $\overline{ab6}$ este un număr de trei cifre rezultă a+b+1∈ {7, 8, 9 }.Cum $u(\overline{abc})=6$ şi $u\left(2^{4k}\right)=6$ rezultă că a+b+1=8 sau a+b=7. Deci $2^{a+b+1}=2^8$ =256, a=2 şi b=5.

6 *Arătaţi că dublul sumei numerelor naturale, care împărţite la 2015 dau câtul egal cu restul, nu este pătrat perfect.*

O.L.M. Ialomiţa,2015

Soluţie. Conform teoremei împărţirii cu rest: $a=2015\cdot q+r, r<2015, r\in N$

Deoarece $q=r$ obţinem $a=2015\cdot r+r=2016\cdot r$.

$a_0=2016\cdot 0$; $a_1=2016\cdot 1$; $a_2=2016\cdot 2$; ... ; $a_{2015}=2016\cdot 2014$

$$2s=2(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2015})=2\cdot 2016\cdot(0+1+2+3+\cdots+2014)=$$

$$=2\cdot 2016\cdot\frac{2014\cdot 2015}{2}=2014\cdot 2015\cdot 2016\cdot$$

Deci dublul sumei este un produs de numere naturale consecutive care este divizibil cu 5 dar nu este divizibil cu 5^2 deci dublul sumei nu este pătrat perfect .

7. *Fie numerele naturale x şi y care satisfac relaţia:* $5x+3y=2015$.

a). Arătaţi că suma celor două numere nu poate fi 462.

b). Aflaţi cele două numere ştiind că suma lor este 463.

O.L.M. Ialomiţa,2015

Soluţie. a) Folosind metoda reducerii la absurd, se presupune că suma celor două numere naturale este 462. Deci $x+y=462\,\big|\cdot 3\Leftrightarrow 3x+3y=1386$

Dar $5x+3y=2015\Rightarrow 2x=629$ Cum 2x este par şi 629 impar obţinem $x\notin N$, contradicţie .

b) $x+y=463\,\big|\cdot 3\Leftrightarrow 3x+3y=1389$

$5x+3y=2015\Rightarrow 2x=626\Leftrightarrow x=313$

$313+y=463\Leftrightarrow y=150$

CLASA a VI-a

1. Se consideră numerele naturale $\boldsymbol{a} = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) + 8$ și $\boldsymbol{b} = 6^{\boldsymbol{a}}$, unde n este un număr natural oarecare.

a) Arătați că numărul 36 se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
b) Determinați restul împărțirii lui $\boldsymbol{a}$ la 3.
c) Arătați că numărul $\boldsymbol{b}$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.

O.L.M.Alba,2015

Soluție. a) $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$

b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \vdots 3$ deci $r = 2$

c) $a = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$

$b = 6^{3k+2} = 6^{3k}(1^3 + 2^3 + 3^3) = (6^k)^3 + (2 \cdot 6^k)^3 + (3 \cdot 6^k)^3$

3. Pe o dreaptă a se consideră punctele $A_o, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2015}$ astfel încât $A_oA_1 = A_1A_2, A_oA_2 = A_2A_3, A_oA_3 = A_3A_4, \ldots\ldots A_oA_{2014} = A_{2014}A_{2015}$ Ştiind că $A_{2014}A_{2015} = 2^{2014}$ cm, calculaţi A_0A_1, $A_{2005}A_{2015}$ şi determinaţi cel mai mic număr natural k asa încât $A_0A_k > 1$ km.

O.L.M.Ialomiţa,2015

Soluție.

Noteaza : $A_0A_1 = x \Rightarrow A_0A_2 = 2x, A_0A_3 = 2^2x, A_0A_4 = 2^3x, \ldots\ldots A_0A_{2015} = 2^{2014}x$

$A_{2014}A_{2015} = A_0A_{2015} : 2 \Leftrightarrow 2^{2013}x = 2^{2014} \Leftrightarrow x = 2$ Obtine:

$A_0A_1 = 2cm; A_{2005}A_{2015} = A_0A_{2015} - A_0A_{2005} = 2^{2015} - 2^{2005} = 1023 \cdot 2^{2005}(cm)$

Din

$A_0A_k > 10^5 \Leftrightarrow 2^k > 10^5 \Leftrightarrow 2^{k-5} > 5^5; si 2^{11} < 5^5 < 2^{12} \Rightarrow \min(k-5) = 12 \Leftrightarrow k = 17$

4. Să se determine a,b$\in N$,a<b pentru care [a,b]=540 si (a,b)=18 .

O.L.M.Ialomiţa,2015

Soluție.

[a,b](a,b)=a · b. a · b=18 · 540, a=18a_1,b=18b_1;(a_1,b_1)=1$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 30$

Din a<b$\Rightarrow$$a_1$<$b_1$ .Obtinem;(a_1,b_1)$\in \{(1,30);(2,15);(3,10)(5,6)\}$

(a,b)∈{(18,540);(36,270);(54,180);(90,108)}

6. Două unghiuri complementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de 25°. Se acceptă că una din laturile celor două unghiuri aparține interiorului unghiului format de cele două bisectoare.

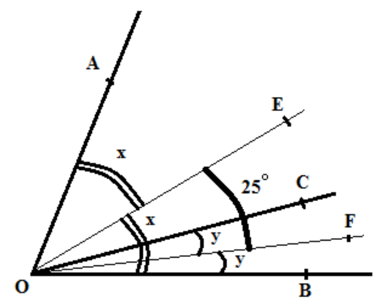
a) Demonstrați că cele două unghiuri nu pot fi adiacente.
b) Determinați măsurile celor două unghiuri.

Rezolvare a) Dacă sunt adiacente, atunci $m(\sphericalangle EOF) = 45^\circ$. Contradicție cu ipoteza.

b) Folosind notațiile de pe figură și ipoteza avem:

$x - y = 25^\circ; 2x + 2y = 90^\circ$

$m(\sphericalangle AOB) = 70^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC) = 20^\circ$

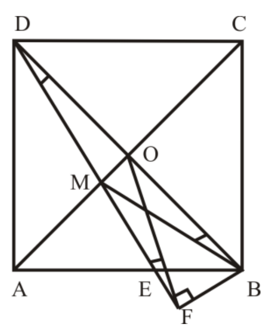


CLASA a VII-a

1. *Fie E un punct pe latura AB a pătratului ABCD şi {M} = AC ∩ DE. Dacă BF ⊥ DE, F ∈ DE iar {O} = AC ∩ BD, să se demonstreze că ∢ OBM ≡ ∢ OFM iar BE este bisectoarea unghiului FBM.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie

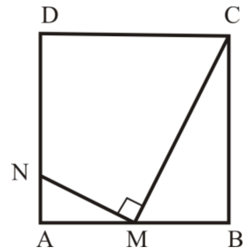


Deoarece M ∈ (AC), MO este mediatoarea segmentului BD aşadar Δ MBD este isoscel, de unde∢MDB ≡ ∢ MBD **(1)**
Pe de altă parte FO este mediană în triunghiul dreptunghic FBD, prin urmare [FO] ≡ [DO] adică Δ FOD este isoscel, de unde:∢ OFD ≡ ∢ ODF **(2)**
Din **(1)** şi **(2)** se obţine că ∢OBM ≡ ∢ OFM.
Δ DAE ~ Δ BFE (∢DAE ≡ ∢ BFE (90°) , ∢DEA ≡ ∢ BEF (op. vf.) de unde se obţine că ∢ADE ≡ ∢ FBE **(3)** Dar Δ AMD ≡ Δ AMB ([AM] ≡ [AM], ∢MAD ≡ ∢ MAB, [DA] ≡ [BA]) aşadar∢ADM ≡ ∢ ABM **(4)**
Din **(3)** şi **(4)** se obţine că ∢FBE ≡ ∢ ABM ceea ce demonstrează că BE este bisectoarea unghiului FBM.

2. Fie M mijlocul laturii AB in pătratul ABCD. Perpendiculara în M pe MC intersectează latura AD în N. Să se calculeze valoarea raportului $\frac{AN}{ND}$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:



Deoarece m(∢NMC) = 90° se obţine că:m(∢AMN) + m(∢BMC) = 90° (1)
Dar m(∢BMC) + m(∢BCM) = 90° (2)
Din (1) şi (2) rezultă că ∢AMN ≡ ∢ BCM.
Triunghiurile AMN şi BCM sunt asemenea (∢NAM ≡ ∢ MBC (90°), ∢AMN ≡ ∢ BCM) prin urmare vom avea $\frac{AN}{MB}=\frac{AM}{BC}$ şi cum $\frac{AM}{BC}=\frac{1}{2}$ (M este mijlocul laturii AB) se obţine că $\frac{AN}{MB}=\frac{1}{2}$. Deoarece MB = $\frac{AD}{2}$, Înlocuind în relaţia de mai sus se găseşte că $\frac{AN}{AD}=\frac{1}{4}$ Şi folosind proporţii derivate, se găseşte $\frac{AN}{ND}=\frac{1}{3}$

---

3. Să se determine numerele naturale prime diferite a, b, c cu proprietatea $\sqrt{a^{a+2}}+\sqrt{b^{b+1}}+\sqrt{c^{c+3}}=156$.

Petre Năchilă

Rezolvare .

$\sqrt{a^{a+2}}\in$ **N** dacă a este par; fiind prim, rezultă a=2; $\sqrt{2^4}=4$

$\sqrt{b^{b+1}}+\sqrt{c^{c+3}}$ = 152; b+1 şi c+3 – pare ⇒ b şi c impare, prime.

Dacă b=3; $\sqrt{3^4}=9$, $\sqrt{c^{c+3}}$ = 143; nu este putere.

Dacă b=5; $\sqrt{5^6}=125 \Rightarrow \sqrt{c^{c+3}}$ = 27; $c^{c+3}=3^6 \Rightarrow$ c = 3, prim.

Dacă b=7; $\sqrt{7^8}=7^4>156$. R: a = 2, b = 5, c = 3.

---

4. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $m(\hat{A})=90^0$, punctul P∈(AB), PD⊥BC, D∈(BC) şi punctul M∈(DC). Demonstraţi că ΔAPD este asemenea cu ΔCMP dacă şi numai dacă MP şi AC sunt paralele.

Gheorghe Bumbăcea

1⁰ MP ∥ AC şi AC ⊥ AB ⇒ MP ∥ AB ⇒ ∢PMB şi ∢B sunt complementare; la fel ∢DPB şi ∢B ⇒ ∢PMB ≡ ∢DPB ⇒ ∢ DPA ≡ ∢CMP (1)

Δ BDP ~ Δ MPB $\Rightarrow \dfrac{BP}{BM}=\dfrac{DP}{MP}$ (2). MP || AC $\Rightarrow \dfrac{BP}{BM}=\dfrac{AP}{CM}$ (3). Din (2) şi (3):

$\dfrac{DP}{MP}=\dfrac{AP}{CM}\Leftrightarrow\dfrac{DP}{AP}=\dfrac{MP}{CM}$ (4). Din (1) şi (4): Δ APD ~ ΔCMP.

2^0 Δ APD ~ ΔCPM $\Rightarrow \sphericalangle$APD $\equiv \sphericalangle$CMP $\Rightarrow \sphericalangle$BPD $\equiv \sphericalangle$PMB, $\sphericalangle$B comun $\Rightarrow \Delta$ BPD ~ ΔPMB $\Rightarrow \sphericalangle$MPB $\equiv \sphericalangle$PDB. Dar m($\sphericalangle$PDB)=$90^0 \Rightarrow$ CA || MP (perp. pe AB)

Clasa a VIII-a

1. *Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, pentru care $\sqrt{4n+1}$ este tot un număr natural.*

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Considerăm numerele naturale n de forma $n = k^2 + k$, $k \in$ **N.** Pentru numerele de această forma, vom avea $4n + 1 = 4\cdot (k^2 + k) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2$.

Aşadar $\sqrt{4n+1}=\sqrt{(2k+1)^2}=2k+1\in$ **N**.Cum $k \in$ **N** , rezultă concluzia problemei.

---

2. *Determinaţi numerele reale x şi y care verifică egalitatea*

$$\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+7}+\sqrt{y^2-6y+18}=5.$$

O.L.M Alba,2015

Soluție. $\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+7}=\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2^2}\geq 2$

$\sqrt{y^2-6y+18}=\sqrt{(y-3)^2+3^2}\geq 3$

$\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+7}+\sqrt{y^2-6y+18}\geq 5$

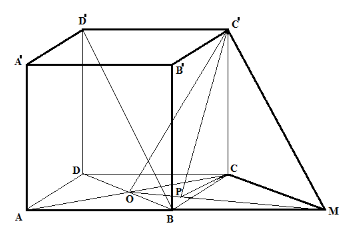
Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=\sqrt{3}$ și $y=3$.

---

3. *Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$, de latură a și fie M simetricul punctului A față de punctul B. Se notează cu O punctul de intersecție al diagonalelor bazei $ABCD$.*

a) Determinaţi, în funcție de a, distanța de la punctul C' la dreapta OM.
b) Determinaţi sinusul unghiului dintre dreptele BD' și $C'O$.

O.L.M Alba 2015



Soluție. a)Ducem $CP\perp OM\Longrightarrow C'P\perp OM$

$\Delta MOC, m(\sphericalangle MCO)=90^\circ\Longrightarrow OM=\frac{a\sqrt{10}}{2}$

$CP=\frac{a\sqrt{10}}{5};\ C'P=\frac{a\sqrt{35}}{5}$

b) Unim pe C' cu M.

$BMC'D'$ paralelogram

$m(\sphericalangle(BD',C'O))=m(\sphericalangle(C'O,C'M))=\propto$

Calculam *aria în două moduri* în $\Delta C'OM$

$sin\propto=\frac{\sqrt{7}}{3}$

4. Să se afle x,y $\in$ R astfel încât:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(8-x)^2+(6-y)^2}+\sqrt{(8-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(6-y)^2}=20$$

Gh.Craciun, Ploiești

Rezolvare

Fie P(x,y) un punct în planul dreptunghiului OABC unde A(0,6), B(8,6), C(8,0).Evident
PO+PB$\geq$OB cu egalitate dacă P $\in$ [AB].
PA+PC$\geq$AC cu egalitate dacă P $\in$ [AC].

Dar PO+PB=$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(8-x)^2+(6-y)^2}$

Iar PA+PC=$\sqrt{(8-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(6-y)^2}$ AC=OB=10 deci

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(8-x)^2+(6-y)^2}+\sqrt{(8-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(6-y)^2}\geq 10+10$$

Avem egalitate dacă P$\in$ $AC\cap BO$ adică P(4,3) rezultă soluţia este x=4 şi y=3.

5. Fie f:**R**$\to$**R**, f(x) = $\frac{3}{2}$ x – 2 și g:(–10, 10)$\to$**R**, g(x) = ax + 3 unde a$\in$**R**\ $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

a) Demonstraţi că $x\cdot f(x) + f(0)\cdot f(1) \geq f\left(\frac{14}{9}\right)$, pentru orice x$\in$**R**.

b) Arătaţi că dacă graficele celor două funcţii au un punct comun, atunci: $\left|\frac{1}{3-2a}\right|<1$.

Nicolae Angelescu şiGheorghe Achim

Rezolvare

. a) $\frac{3}{2}x^2-2x+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{9}-2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}\geq 0 \Leftrightarrow (3x-2)^2 \geq 0$; (A).

b) f(x) = g(x) $\Leftrightarrow \frac{3}{2}x-2=ax+3 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{2}-a\right)=5 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3-2a}$.

$$-10<\frac{10}{3-2a}<10\Leftrightarrow\left|\frac{1}{3-2a}\right|<1.$$

Cerc pedagogic de matematică

Text: Graţiela Mihăescu, foto: m.m. principal Nicolae Milea

Luni, 23 martie a.c., în Colegiul Naţional Militar "Dimitrie Cantemir", instituţie prestigioasă de învăţământ preuniversitar cu peste un secol de existenţă educativă şi de performanţă s-a desfăşurat Cercul pedagogic de matematică, în cadrul căruia gazde au fost profesorii: Alexandru Diţei, Victor Vulcu, Gabriel Necula, Daniela Oprea şi Lorena Ezaru.

În deschiderea manifestării, comandantul Colegiului Naţional Militar "Dimitrie Cantemir", colonel Horia Stănescu, a prezentat câteva repere istorice ale instituţiei şi a reliefat performanţele recente ale elevilor noştri la Simularea examenului de bacalaureat – disciplina matematică şi faza judeţeană a Olimpiadei de matematică. De asemenea, în Muzeul colegiului, directorul adjunct al instituţiei, prof. dr. Aurel-Constantin Soare a scos în evidenţă date importante din istoria Cantemirului, înalt aşezământ de cultură şi educaţie, care reprezintă tradiţie şi modernitate.

Cu o tematică bogată în care inovaţia şi creativiatatea au jucat rolul primordial, peste 40 de profesori de matematică din şcoli gimnaziale şi licee de pe Valea Superioară a Prahovei au avut posibilitatea să participe în cadrul Cercului, desfăşurat în laboratorul AeL şi Cabinetul de matematică, prof. emerit Iacob Hadârcă la două lecţii demonstrative. Dascălii au avut prilejul să-şi valorifice propria experienţă printr-un schimb real de idei şi practici didactice. În acest fel, a fost posibil un dialog fertil care a avut la bază comunicarea cu elevii, care au înţeles că matematica este regina ştiinţelor şi fără ea nu se poate face nimic. Teme precum "Corpuri rotunde" şi "Pregătirea examenului de evaluare naţională 2015" au aparţinut prof. Iulia Radu de la Şcoala Gimnazială "Constantin Brâncoveanu" Breaza. De cealaltă parte, profesorii de matematică din Colegiul Naţional Militar "Dimitrie Cantemir" au prezentat referate şi lecţii interesante, utile cu un conţinut modern din sfera matematicii: Funcţii derivabile – aspecte ştiinţifice şi metodice, prof. Daniela Oprea, Pregătirea examenului de bacalaureat 2015, prof. Lorena Ezaru, iar prof. Gabriel Necula a abordat lecţia demonstrativă "Derivatele unor funcţii elementare", în cadrul căreia a încercat o dinamizare a lecţiei prin distribuirea echilibrată a sarcinilor de lucru pe grupele de elevi.

Materialele didactice pregătite au scos în evidenţă buna pregătire a cadrelor didactice, care au încercat să aducă în prim plan modalităţi prioritare de creştere a calităţii procesului instructiv-educativ, în scopul obţinerii unor performanţe observabile şi măsurabile în activitatea cu elevii.

Prezent la eveniment, prof.univ.dr. Miron Oprea, preşedintele Fundatiei oamenilor de ştiinţă Prahova a fost impresionat atât de lecţia demonstrativă a prof. Gabriel Necula, cât şi de conţinutul celor trei referate: "Felicit, din toată inima, pe organizatorii acestui cerc din toate punctele de vedere, un veritabil Festival matematic. Cu astfel de profesori în şcolile noastre, MATEMATCA va trăi!", a încheiat domnul profesor Miron Oprea.