TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL II

Clasa a XII-a *Matematică-Informatică*

6.05.2015

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine modulul numărului complex $z=(1+i)^{202}+(1-i)^{202}$.

5p **2.** Ecuaţia $x^2-x+m=0$ are soluţiile x_1,x_2. Să se determine numărul real m pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{5}$.

5p **3.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.

5p **4.** Se consideră toate numerele naturale de câte trei cifre ,scrise cu cifre din mulţimea $\{1;2;3\}$. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$.Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin $O(0,0)$ şi este paralelă cu AB .

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $AB=10, BC=15, m(\sphericalangle B)=60^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(2,1,-1)$ să fie o soluţie a sistemului.

5p **b)** Să se determine valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care rangul matricei sistemului este 2.

5p **c)** Pentru $m=3$ să se rezolve sistemul de ecuaţii.

2. Se consideră polinomul $f=2X^4+9X^2+aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$

5p **a)** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, știind că polinomul f admite rădăcina $x_1=i$.

5p **b)** Calculați $\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x_3-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x_4-\frac{3}{2}\right)^2$.

5p **c)** Determinați $a,b\in\mathbb{R}$, știind că f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(3,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+3)-\ln(x-3)$.

5p **a)** Arătați că funcția este strict descrescătoare pe intervalul $(3,\infty)$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=e-1$.

5p **b)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xe^{-x}f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL II
Clasa a XII-a M*atmatică-Informatică*
6.05.2015
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$z=\left[(1+i)^2\right]^{101}+\left[(1-i)^2\right]^{101}=(2i)^{101}+(-2i)^{101}=$ $=(2i)^{101}-(2i)^{101}=0$ $\Rightarrow \lvert z\rvert=\lvert 0\rvert=0$	**2p** **2p** **1p**
2.	$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1\cdot x_2=m\end{cases}$ $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{m}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow m=-5$	**2p** **2p** **1p**
3.	CE: $\left.\begin{cases}x+2>0\\ x>0\end{cases}\right\rvert \Rightarrow x\in(0,\infty)$ $\log_2\left(x(x+2)\right)=3\Rightarrow x(x+2)=8$ $x^2+2x-8=0\Rightarrow x_1=-4\notin(0,\infty);x_2=2\in(0,\infty)\Rightarrow x=2$ soluția ecuației	**1p** **2p** **2p**
4.	Număr cazuri posibile=$\left\lvert\left\{\overline{abc}\,\middle\vert\, a,b,c\in\{1,2,3\}\right\}\right\rvert \overset{reg.prod.}{=} 3\cdot3\cdot3=27$ $\overline{abc}\,\vdots\,3\Leftrightarrow(a+b+c)=3k,k\in\mathbb{N}$ Număr cazuri favorabile=$\lvert\{111;123;132;213;222;231;312;321;333\}\rvert=9$ $P=\dfrac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2}{2}=1$ $d\parallel AB\Leftrightarrow m_d=m_{AB}\Rightarrow m_d=1$ $d:y-y_O=m_d(x-x_O)\Leftrightarrow y-0=1\cdot(x-0)\Leftrightarrow x-y=0$	**1p** **2p** **2p**
6.	$AC=b,AB=c=10,BC=a=15,m(\sphericalangle B)=60^\circ \overset{teo.\cos}{\Rightarrow} b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $\Rightarrow AC=b=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(2,1,-1)$ soluție a sistemului $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2-3=-3\ (A) \\ 4+1-1=4\ (A) \\ 2m-1-4=1 \end{cases}$ $\Rightarrow 2m=6 \Rightarrow m=3$	**1p** **1p** **1p** **2p**
	b)	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists d_2 \neq 0 \\ \det A=0 \end{cases}$ $d_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$; $\det A=0 \Leftrightarrow 15-5m=0$ $\Leftrightarrow m=3$ pt. care $\text{rang } A=2$	**2p** **2p** **1p**
	c)	Pt. $m=3 \overset{b)}{\Rightarrow} \text{rang } A=2 \Rightarrow \exists \Delta_{car}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \overset{T.Rouche}{\Rightarrow}$ Sist. compatibil simplu nedeterminat Ecuatii principale: 1, 2; ec. secundara 3; necunoscute principale: x, y, secundara $z=\alpha$ $\begin{cases} x-2y=-3-3\alpha \\ 2x+y=4-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha+2 \end{cases} \Rightarrow (1-\alpha, 2+\alpha, \alpha), \alpha\in\mathbb{R}$ soultia sist.	**2p** **1p** **2p**
2.	**a)**	$f\in\mathbb{R}[X], x_1=i \Rightarrow x_2=-i$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 & (V_1) \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{9}{2} & (V_2) \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{a}{2} & (V_3) \\ x_1x_2x_3x_4=\frac{b}{2} & (V_4) \end{cases}$ inloc. in $V_1 \Rightarrow i-i+x_3+x_4=0 \Rightarrow x_3+x_4=0$ inloc. in $V_2 \Rightarrow 1+x_1\underbrace{(x_3+x_4)}_{0}+x_2\underbrace{(x_3+x_4)}_{0}+x_3x_4=\frac{9}{2} \Rightarrow x_3x_4=\frac{7}{2} \Rightarrow x_3, x_4=$ sol. ec. $x^2+\frac{7}{2}=0$ $x_3=\sqrt{\frac{7}{2}}i$; $x_4=-\sqrt{\frac{7}{2}}i \Rightarrow$ din V_3 obtinem $a=0$ si din V_4 obtinem $b=7$	**1p** **1p** **1p** **2p**
	b)	$S=\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x_3-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x_4-\frac{3}{2}\right)^2=S_2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot S_1+4\cdot\frac{9}{4}=$ $=V_1^2-2V_2-3S_1+9=0-9+9=0$, unde $S_n=\sum_{i=1}^{4}x_i^n$	**3p** **2p**
	c)	$a,b\in\mathbb{R}; x_i\in\mathbb{R}\ \forall i\in\{1,2,3,4\} \Rightarrow S=\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$ Dar, cf b) $S=0 \Rightarrow \left(x_i-\frac{3}{2}\right)^2=0, \forall i\in\{1,2,3,4\}$ $\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{3}{2}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$f'(x)=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=-\frac{6}{(x+3)(x-3)}$	2p
		$-6<0\ ;(x+3)>0\ ;(x-3)>0\ \forall x\in(3,\infty)\Rightarrow f'(x)<0\ \ \forall x\in(3,\infty)\Rightarrow f$ str. descresc. pe $(3,\infty)$	3p
	b)	As. oriz. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(x+3)-\ln(x-3)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)\right)=\ln 1=0\in\mathbb{R}$	2p
		$\Rightarrow y=0$ ec. asimptotei orizontale la $\infty\Rightarrow\nexists$ as.oblică la ∞	1p
		As. vert. $l_d(3)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\left(\ln(x+3)-\ln(x-3)\right)=\ln 6-(-\infty)=\infty$	1p
		$\Rightarrow x=3$ ec.asimptotei verticale la dreapta la $+\infty$.	1p
	c)	$\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x\right)\overset{\ln\text{ cont}}{=}\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x\right)=$	2p
		$\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{6}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{6}}\right]}_{e}^{\frac{6x}{x-3}}\right)=\ln\left(e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-3}}\right)=\ln\left(e^6\right)=6$	3p
2.	a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\frac{e^x\cdot\cancel{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}dx=\int_0^1 e^x dx$	2p
		$=e^x\Big\|_0^1=e-1$	3p
	b)	$g(x)=x\cdot e^{-x}\cdot e^x\cdot\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{x^2+1}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$	1p
		$x\geq 0;\sqrt{x^2+1}>0\ \ \forall x\in[0,1]\Rightarrow g(x)\geq 0\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow\left\|g(x)\right\|=g(x)\ \forall x\in[0,1]$	1p
		$A=\int_0^1\left\|g(x)\right\|dx=\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx\underset{2xdx=dt}{\overset{x^2+1=t}{=}}\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg\|_1^2=$	2p
		$=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	1p
	c)	$V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\left(x^2+1\right)dx=$	1p
		$=\pi\left[\frac{e^{2x}\left(x^2+1\right)}{2}\Bigg\|_0^1-\int_0^1 xe^{2x}dx\right]=\pi\left[\frac{2e^2-1}{2}-\left(\frac{xe^{2x}}{2}\Bigg\|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx\right)\right]=$	2p
		$=\pi\left[\frac{2e^2-1}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^{2x}}{4}\Bigg\|_0^1\right]=$	1p
		$=\pi\left(\frac{e^2-1}{2}+\frac{e^2-1}{4}\right)=\frac{3\pi\left(e^2-1\right)}{4}$	1p