TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL II

Clasa a XII-a *Științele naturii*

6.05.2015

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se determine numărul real x, știind că numerele $x-1$, $x+1$ și $2x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, știind că x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-x-2=0$.

5p **3.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+1}=5-x$.

5p **4.** Să se determine câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(3-2a)\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(2a-1)\vec{i}+\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului MNP știind că $MN=NP=6, m(\sphericalangle MNP)=120^0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1 Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22, \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$ unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Să se arate că tripletul $(7;1;1)$ nu poate fi soluţie a sistemului, $\forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru $a=0$, să se determine soluţia sistemului.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3-2X^2-X+m+1$ care are coeficienţi reali.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g=X-1$.

5p **b)** Pentru $m=1$, să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **c)** Pentru $m=2$, să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:[1;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e f'(x)dx$..

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $[1;+\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul real $a\in(1;e^2)$, astfel încât aria suprafeţei plane determinată de graficul funcţiei f, axa Ox, dreptele de ecuaţii $x=a$ şi $x=e^2$ să fie egală cu $\ln\frac{3}{2}$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV — MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL II
Clasa a XII-a *Ştiinţe ale Naturii*
6.05.2015
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\div\div\, x-1, x+1, 2x+5 \Leftrightarrow (x+1)^2=(x-1)(2x+5)$ $\Leftrightarrow x^2+2x+1=2x^2+3x-5 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$ $\Rightarrow x_1=-3; x_2=2$	**2p** **2p** **1p**
2.	$\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1\cdot x_2=-2 \end{cases}$ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
3.	$\left.\begin{matrix} CE: x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1 \\ CC: 5-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 5 \end{matrix}\right\vert \Rightarrow x\in[-1,5]$ $\uparrow^2 \Rightarrow x+1=25-10x+x^2 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0$ $x_1=3\in[-1,5], x_2=8\notin[-1,5] \Rightarrow x=3$ soluția ecuației	**1p** **2p** **2p**
4.	Numărul numerelor= $A_5^4-A_4^3=$ $=\frac{5!}{1!}-\frac{4!}{1!}=2\cdot3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4=120-24=96$ numere	**3p** **2p**
5.	$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (3-2a)(2a-1)+(a+1)\cdot1=0 \Leftrightarrow$ $4a^2-9a+2=0 \Rightarrow a_1=2; a_2=\frac{1}{4} \Rightarrow a\in\left\{\frac{1}{4},2\right\}$	**3p** **2p**
6.	$A_{\triangle MNP}=\frac{MN\cdot NP\cdot\sin(\sphericalangle MNP)}{2} \Rightarrow$ $A_{\triangle MNP}=\frac{6\cdot6\cdot\sin(120^\circ)}{2}=\frac{36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=9\sqrt{3}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	Pt. $a=1 \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{C_2=C_3}{=} 0$	**5p**
	b)	Presupunem că $(7,1,1)$ este soluție a sistemului $\Rightarrow \begin{cases} 7+4+4=15\ (A) \\ 21+a+4+5=22 \\ 21+2+3-a=16 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ a=10 \end{cases}$ imposibil $\Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow (7,1,1)$ nu poate fi sol.a sist. $\forall a\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**

	c)	Pt. $a=0 \Rightarrow \Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & 4 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}=3 \Rightarrow$ SCD (R.Cramer)	**2p**
		$\Delta_x=6 \Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow x=3$	**1p**
		$\Delta_y=4 \Rightarrow y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (3,2,1)$ soluția sistemului	**1p**
		$\Delta_z=2 \Rightarrow z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow z=1$	**1p**
	a)	$f \vdots g \Leftrightarrow f \vdots (X-1) \overset{T.Bezout}{\Leftrightarrow} f(1)=0$	**2p**
		$f(1)=0 \Leftrightarrow m-2-1+m+1=0 \Leftrightarrow m=1$	**3p**
	b)	Pt. $m=1,\ f=X^3-2X^2-X+2$	**1p**
		$f=X\left(X^2-1\right)-2\left(X^2-1\right)=\left(X^2-1\right)(X-2)$	**2p**
		$f=(X-1)(X+1)(X-2)$ desc. lui f în prod. de factori ired. în $\mathbb{R}[X]$	**2p**
	c)	Pt. $m=2,\ f=2X^3-2X^2-X+3$	**1p**
		$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$	**2p**
		$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right) \Rightarrow$	**1p**
		$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2\left(-\frac{1}{2}\right)=2$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$	**1p**
		$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=\frac{1}{1}=1$	**4p**
	b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\in\mathbb{R} \Rightarrow y=1$ ec.as. oriz. la $\infty \Rightarrow \nexists$ as. oblică la ∞	**2p**
		$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{0}{-1}=0\in\mathbb{R} \Rightarrow y=0$ ec.as. oriz. la $-\infty \Rightarrow \nexists$ as. oblică la $-\infty$	**1p**
		$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{1}{0_-}=-\infty$	**1p**
		$\Rightarrow x=0$ ec.as vert. la st la $-\infty$ și la dr la $+\infty$	
		$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{1}{0_+}=+\infty$	**1p**
	c)	$f'(x)=\frac{e^x\cdot\left(e^x-1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$	**2p**
		$-e^x<0$; $\left(e^x-1\right)^2>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$	**1p**
		$\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$ și f strict descrescătoare pe $(0,\infty)$	**2p**

2.	a)	$\int_1^e f'(x)dx = f(x)\Big\vert_1^e = f(e) - f(1) =$	3p
		$= \frac{1}{e(1+\ln e)} - \frac{1}{1(1+\ln 1)} = \frac{1}{2e} - 1 = \frac{1-2e}{2e}$	2p
	b)	Fie $F:[1,\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in [1,\infty)$	1p
		$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$; $x > 0$, $1+\ln x > 0$ $\forall x \in [1,\infty)$	2p
		$\Rightarrow F'(x) > 0$, $\forall x \in [1,\infty) \Rightarrow F$ crescătoare pe $[1,\infty)$	2p
	c)	$A = \int_a^{e^2} \lvert f(x) \rvert dx \overset{\substack{cf.a) \\ f(x)>0}}{=} \int_a^{e^2} f(x)dx = \int_a^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)}dx \Rightarrow$	2p
		$1+\ln x = t; \frac{1}{x}dx = dt \Rightarrow A = \int_{1+\ln a}^{3} \frac{1}{t}dt = \ln\lvert t\rvert\Big\vert_{1+\ln a}^{3} \overset{1+\ln a>0}{=} \ln\left(\frac{3}{1+\ln a}\right)$	2p
		$\Rightarrow \ln\left(\frac{3}{1+\ln a}\right) = \ln\frac{3}{2} \overset{\ln inj}{\Leftrightarrow} \frac{3}{1+\ln a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e \in (1, e^2)$	1p