TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL II

Clasa a XII-a *Tehnologic*

6.05.2015

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze suma 1+5+9+13+...+25.

5p **2.** Să se calculeze $x_1+x_2+x_1x_2$ știind că x_1 și x_2 sunt soluţiei ecuaţiei $x^2-2x-3=0$.

5p **3.** Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $125^x=\frac{1}{5}$.

5p **4.** Să calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $\{1;2;3;4\}$ acesta să verifice inegalitatea $n!\geq n^2$.

5p **5.** Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctele $A(2;3)$ şi $B(-3;-2)$.

5p **6.** Să se calculeze cos *x*, ştiind că $\sin x=\frac{3}{5}$ şi $x\in(0^0;90^0)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1 Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$..

5p **b)** Să se determine $x\in R$ astfel încât $\det(A-xI_2)=0$.

5p **c)** Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuaţia $AX=XA$.

2. Fie polinomul $f=X^3+2X^2-5X+1$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Calculaţi $f(0)+f(1)$.

5p **b)** Calculaţi $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

5p **c)** Determinaţi câtul și restul împărţirii lui f la X^2+1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcţiei *f*.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Să se determine $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f''(x)dx=2e-1,$ unde f'' este derivata a doua a funcţiei *f*.

5p **c)** Să se determine aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f , axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL II
Clasa a XII-a *Tehnologic*
6.05.2015
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I

1.	$1+5+9+\ldots+25=\frac{(1+25)\cdot 7}{2}=91$	**5p**
2.	$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1\cdot x_2=-3 \end{cases}$	**3p**
	$x_1+x_2+x_1x_2=2-3=-1$	**2p**
3.	$\left(5^3\right)^x=5^{-1}\Leftrightarrow 5^{3x}=5^{-1}$	**3p**
	$\overset{\text{inj.exp}}{\Leftrightarrow} 3x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$	**2p**
4.	$1!\geq 1^2\Leftrightarrow 1\geq 1\ (A); 2!\geq 2^2\Leftrightarrow 2\geq 4 (F); 3!\geq 3^2\Leftrightarrow 6\geq 9\ (F); 4!\geq 4^2\Leftrightarrow 24\geq 16\ (A)$	**3p**
	$P=\frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	**2p**
5.	$AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3x-4-3y+9+2x-2y=0$	**3p**
	$\Leftrightarrow 5x-5y+5=0\Leftrightarrow x-y+1=0$	**2p**
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=\frac{16}{25}$	**3p**
	$\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}$ sau $\cos x=-\frac{4}{5}$, dar $x\in\left(0^\circ,90^\circ\right)\Rightarrow\cos x>0\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
		$=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2I_2$	**2p**
	b)	$A-x\cdot I_2=\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix}$	**2p**
		$\det\left(A-x\cdot I_2\right)=x^2-2\Rightarrow x^2-2=0\Rightarrow x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$	**3p**
	c)	Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{R}\Rightarrow AX=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix}, XA=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}$	**2p**

		$\Rightarrow AX = XA \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=a+b \\ b+d=a-b \\ a-c=c+d \\ b-d=c-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=b \\ d=a-2b \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a-2b \end{pmatrix}; a,b\in\mathbb{R} \\ a,b\in\mathbb{R} \end{cases}$	3p
2.	a)	$f(0)=1;\ f(1)=1+2-5+1=-1$ $\Rightarrow f(0)+f(1)=1-1=0$	4p 1p
	b)	$f=1\cdot(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ $\Rightarrow f(1)=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\overset{a)}{=}-1$	2p 3p
	c)	Efectuarea corecta a impartirii Catul= $X+2$; Restul= $-6X-1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$f'(x)=\dfrac{(x^2)'(x+1)-x^2(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$	3p 2p
	b)	$f'(x)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=-2$ Pt. $x\in(-\infty,-2],\ f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ crescatoare pe $(-\infty,-2]$ Pt. $x\in[-2,-1),\ f'(x)\le 0\Rightarrow f$ descrescatoare pe $[-2,-1)$ Pt. $x\in(-1,0],\ f'(x)\le 0\Rightarrow f$ descrescatoare pe $(-1,0]$ Pt. $x\in[0,\infty),\ f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ crescatoare pe $[0,\infty)$	1p 1p 1p 1p 1p
	c)	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x+1)}\underset{l'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1}=1\in\mathbb{R}^*\Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x+1}\underset{l'H}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{1}=-1\in\mathbb{R}\Rightarrow n=-1$ $y=x-1$ ecuatia asimptotei oblice la $+\infty$	2p 2p 1p
2.	a)	$\int_0^1\dfrac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\dfrac{x\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}dx=\int_0^1 xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$	3p 2p
	b)	$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$ $\int_0^1 f''(x)dx=\int_0^1(f'(x))'dx=f'(x)\Big\vert_0^1=f'(1)-f'(0)=2e-1$	2p 3p
	c)	$x\ge 0; e^x>0, \forall x\in[0,1]\Rightarrow f(x)=xe^x\ge 0, \forall x\in[0,1]\Rightarrow \lvert f(x)\rvert=f(x)$ pt. $x\in[0,1]$ $A=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big\vert_0^1-e^x\Big\vert_0^1=$ $=e-(e-1)=1$	1p 3p 1p