INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a IV-a

PROBLEMA 1

Un gospodar are în curte găini şi iepuri, în total 30 de capete şi 84 de picioare. Săptămânal, pentru hrana unei păsări sunt folosite, în medie, 500 g de grăunțe, iar pentru hrana unui iepure de 4 ori mai mult. Kilogramul de grăunțe costă 4 lei. Cât plătește gospodarul pe grăunțele consumate de animale în 4 săptămâni?

PROBLEMA 2

La un concurs de matematică au fost date 40 de probleme pentru care se acordau 10 puncte pentru problema corectă şi se penalizează cu 4 puncte problemele rezolvate greşit. Dacă Mihai obține 120 de puncte, precizaţi câte probleme corecte a făcut.

PROBLEMA 3

La începutul anului şcolar, un elev sârguincios a împrumutat de la biblioteca C.N.M.V. 11 culegeri de matematică și 16 cărți de literatură. Săptămânal, el predă bibliotecii 2 cărți. Dacă predă 2 cărți de același fel (ambele de literatură sau ambele de matematică) mai împrumută o carte de literatură, iar dacă predă o culegere de matematică și o carte de literatură, împrumută o culegere de matematică. Care este ultima carte cu care rămâne elevul?

PROBLEMA 4

NUMERE CIVILIZATE

Un număr care nu se împarte exact la niciuna din cifrele sale se numește civilizat (precizăm că niciun număr nu se împarte la 0).

a) Arătaţi că numerele 52 şi 354 nu sunt civilizate.
b) Claudiu şi Diana au găsit două numere civilizate care înmulţite dau tot un număr civilizat. Reconstituiţi înmulţirea găsită de cei doi copii (steluțele înlocuiesc cifre).

$$\begin{array}{r} 23* \times \\ *9 \\ \hline **** \end{array}$$

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a V-a

PROBLEMA 1

Să se arate că numărul: A = 4031 + 2 + 6 + 10 + … + 8058 se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte consecutive de numere naturale.

PROBLEMA 2

Calculaţi $(a-b)(a+b)^2$ știind că $a,b \in \mathbb{N}^*$ şi

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\cdots+\frac{a+2014}{b+2014}=2015.$$

PROBLEMA 3

a) Determinaţi cifrele a şi b, ştiind că $\overline{ab3}=3^{a+b-1}$.

b) Determinaţi cifrele a, b, c ştiind că: $\overline{aa0}+3\cdot\overline{b0}=\overline{ccc0}$.

(Numerele sunt scrise în baza 10).

PROBLEMA 4

Mulţimea numerelor naturale se împarte în submulţimi astfel: {0}; {1, 2}; {3, 4, 5}; {6, 7, 8, 9}; …, unde prima submulţine conţine primul număr natural, a doua submulțime conține următoarele două numere naturale şi aşa mai departe. Determinaţi:

a) Cu ce număr natural începe cea de-a 50 – a submulțime;

b) Suma elementelor celei de-a 50 – a submulţimi;

c) Suma elementelor primelor 50 submulţimi.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”
Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a VI-a

PROBLEMA 1

a) Suma a trei numere naturale nenule este 345. Dacă primele două valori sunt direct proporţionale cu 0,(3) respective 1,(6) iar ultimele două valori sunt invers proporţionale cu 3 respectiv 9, să se determine numerele.

b) Se consideră numărul $a = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2015}$.
Arătaţi că numărul a este subunitar şi precizaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $b = (1-a)^n \cdot 63^n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA 2

Să se afle numerele natural x şi y, ştiind că $1^x + 2^x + 3^x + \cdots + 3133^x = 56^y - 3$

PROBLEMA 3

Se consideră triunghiul ABC şi punctul O mijlocul segmentului [BC], iar AB >AC. Fie (AD bisectoarea unghiului A, $D \epsilon (BC)$. Perpendiculara din O pe bisectoarea (AD intersectează laturile AC şi AB înpunctele E, respective F.

a) Demonstraţi că [BF] ≡ [CE].
b) Calculaţi raportul dintre lungimile segmentelor AM şi NE, unde punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor [AB] respectiv [AC].

PROBLEMA 4

Fie ABC un triunghi echilateral, M mijlocul laturii [BC] şi D ∈ (AM) astfel încât AM+MD=AB. Să se determine unghiul $\widehat{DBM}$.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a VII-a

PROBLEMA 1

Se consideră patru pătrate cu laturi de lungimi egale cu a, b, c, d. Să se demonstreze că media aritmetică a celor patru valori este cel mult egală cu suma tuturor rapoartelor dintre ariile şi perimetrele oricăror trei dintre pătrate.

PROBLEMA 2

Numerele x, y, z sunt numere natural cu proprietatea că $x<y<z$. Dacă x, y, z sunt direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive în câte moduri diferite poate fi scris numărul 180 sub forma x + y + z?

PROBLEMA 3

În triunghiul ABC se consideră mediana [BB’], B’ϵ[AC]şi punctul E mijlocul medianei. Dreapta AE intersectează pe [BC] în punctul D.

a) Calculaţi raportul $\frac{BD}{DC}$.
b) Demonstraţi că DG || AB, unde G este centrul de greutate al triunghiului.
c) Dacă aria triunghiului BDE este de 20 cm^2 , calculaţi aria triunghiului ABC.

PROBLEMA 4

Linia mijlocie a ΔABC paralelă cu latura BC intersectează cercul circumscris triunghiului în B’ și C’. Să se determine lungimea segmnetului B’C’ în funcție de laturile ΔABC.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a VIII-a

PROBLEMA 1

Se dau A ,B, C, D patru puncte necoplanare.

a) Fie $L \in [AD]$, $M \in [BD]$ și $N \in [CD]$ astfel încât $(LMN) \nparallel (ABC)$. Notând $LM \cap AB = \{P\}$, $LN \cap AC = \{Q\}$ și $MN \cap BC = \{R\}$ să se arate că punctele P, Q, R sunt coliniare.

b) Fie A’ , B’, C’ proiecțiile lui D pe dreptele BC, AC respective AB.
Să se arate că $C'A^2 + A'B^2 + B'C^2 = C'B^2 + A'C^2 + B'A^2$.

c) Să se arate că proiecția lui D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC dacă și numai dacă $AB \perp CD$ și $BC \perp AD$.

PROBLEMA 2

Să se demonstreze că:

$$\frac{10}{\sqrt{11^{11}}} + \frac{11}{\sqrt{12^{12}}} + \cdots + \frac{2014}{\sqrt{2015^{2015}}} + \frac{2015}{\sqrt{2016^{2016}}} > \frac{1}{10!} - \frac{1}{2016!}, \text{ unde } n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

PROBLEMA 3

Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată. Punctul M e mijlocul înălțimii [VO] a piramidei, punctul N e mijlocul segmentului [BM] iar $P \in (AO)$ astfel încât AP=3PO și $BM \cap VD = \{R\}$.

a) Arătați că $\frac{BN}{BR} = \frac{3}{8}$.

b) Arătatați că PN || (VDC) .

PROBLEMA 4

Să se demonstreze că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{15}{2}.$$

În ce condiții are loc egalitatea?

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ

COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a IX-a

PROBLEMA 1

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_i > 2015$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{n-1}{2015}.$$

Să se arate că

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i - 2015}.$$

PROBLEMA 2

Fie ABC un triunghi oarecare, AA_1, BB_1, CC_1 bisectoarele interioare ale triunghiului, AA_2, BB_2, CC_2 medianele triunghiului. Notăm cu G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, G^* centrul de greutate al triunghiului $G_AG_BG_C$, G centrul de greutate al triunghiului ABC şi G_1 centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$. Să se demonstreze

a) $\vec{r}_{G_1} = \dfrac{a(4p^2-a^2)\overrightarrow{r_A} + b(4p^2-b^2)\overrightarrow{r_B} + c(4p^2-c^2)\overrightarrow{r_C}}{3(2p-a)(2p-b)(2p-c)}$, unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

b) Punctele G^*, G şi G_1 sunt coliniare.

PROBLEMA 3

Se consideră punctele M, N, P situate pe laturile (AB), (BC) respectiv (CA) ale triunghiului echilateral ABC. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) M, N, P sunt mijloacele laturilor (AB), (BC) respectiv (CA);

b) Triunghiurile AMP, BMN, CNP şi MNP au acelaşi perimetru.

PROBLEMA 4

Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi numărul funcţiilor crescătoare f: $\{1, 2, 3, \ldots, m\} \to \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \ \forall\, x, y \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}.$$

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL" TURDA
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ"

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a X-a

PROBLEMA 1

Să se determine funcţiile $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ care satisfac relaţia

$$\frac{f^2(n)}{n+f(n)}+\frac{n}{f(n)}=\frac{1+f(n+1)}{2}, \text{ oricare ar fi } n\in\mathbf{N}^*.$$

PROBLEMA 2

Se consideră numerele complexe z_1, z_2 şi z_3, distincte două câte două, cu proprietatea că $|z_1-z_2|\geq\max\{|z_1-z_3|,|z_2-z_3|\}$. Să se arate că $|z_1+z_2-z_3|\leq|z_1+z_3-z_2|+|z_2+z_3-z_1|$.

PROBLEMA 3

Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_{2015}>0$ şi funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=a_1^x+a_2^x+...+a_{2015}^x$. Dacă $f(2015)=f(-2015)=2015$ arătaţi că $f(x)=2015, \forall x\in\mathbf{R}$.

PROBLEMA 4

Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe cu proprietatea că $|z_1|+|z_2|+|z_3|\leq 1$. Să se arate că $|z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3|\leq 1$.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a XI-a

PROBLEMA 1

a) Să se găsească două matrice A, B $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că orice două matrice A, B $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea de la punctul a) nu comută.

PROBLEMA 2

Fie $f: (0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $x f'(x) - f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$. Demonstraţi că funcţia f poate fi prelungită prin derivabilitate în punctul $x = 0$.

PROBLEMA 3

Fie $a > 0$ şi $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori cu proprietatea că

$|f(x)| \leq 1$, $\forall\, x \in [-a, a]$. Să se arate că pentru oricare numere naturale $p, q \geq 2$ cu proprietatea că

$$(f(0))^p + (f'(0))^q > 1 + \left(\frac{2}{a}\right)^q$$

există un punct $c \in (-a, a)$ astfel încât

$$p\,(f(c))^{p-1} + q\,(f'(c))^{q-2} f''(c) = 0.$$

PROBLEMA 4

Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}{\sqrt{e}}\right]^n.$$

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „MIHAI VITEAZUL” TURDA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”

Ediţia a XV-a, 8– 9 MAI 2015

CLASA a XII-a

PROBLEMA 1

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1,\\ 1+\ln x, & x>1.\end{cases}$ Determinaţi funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{x^2-1}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$.

PROBLEMA 2

Determinaţi numărul matricelor $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ \hat{0} & a & d\\ \hat{0} & \hat{0} & a\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_{2015})$ cu proprietatea că $A^{2015}=\mathrm{I}_3$.

PROBLEMA 3

Să se determine funcțiile integrabile f: $[0,1]\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_0^x f(t)dt=(f(x))^{2015}+f(x), \forall\, x\epsilon\,[0,1]\,.$$

PROBLEMA 4

Fie $(R,+,\cdot)$ un inel. Perechea $(a,b)\in R\times R$ are proprietatea (P) dacă singura soluție a ecuației $axa=bxb$ este $x=0$. Să se arate că dacă (a,b) are proprietatea (P) și a-b este inversabil, atunci ecuația $axa-bxb=a+b$ are soluție unică în R.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.