

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ
„OLIMPIADA SATELOR DIN TRANSILVANIA”**

etapa interjudețeană, 25.04.2015,
Școala Gimnazială „Enea Grapini” Șanț

Barem clasa a VIII-a

I. a) Din egalitatea dată obținem $\frac{1}{b} = \frac{a-4}{4a}$, astfel $\frac{a-4}{2} = \frac{2a}{b}$ și $\frac{b-4}{2} = \frac{2b}{a}$ 5p Deci

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}-2\right) \cdot \left(\frac{b}{2}-2\right)} = \sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 2 \in N$. 5p b)

Avem $b = \frac{4a}{a-4}$, cum $b \in N$ deducem că $4a : (a-4)$, dar $4(a-4) : (a-4)$, 5p

obținem $[4a - 4(a-4)] : (a-4)$, deci $(a-4) \in D_{16}$. 2p

În final, $(a, b) \in \{(5, 20), (6, 12), (8, 8), (12, 6), (20, 5)\}$. 3p

II. a) $A(m^2 + m, 2m + 8) \in G_f \Leftrightarrow f(m^2 + m) = 2m + 8 \Leftrightarrow$ 5p

$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\}$. 5p

b) $1 = 2 \cdot 1 - 1, 3 = 2 \cdot 2 - 1, 5 = 2 \cdot 3 - 1, \dots, 2015 = 2 \cdot 1008 - 1$, deci suma are 1008 termeni. 3p

$f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(2015) = 2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 2015) + 6 \cdot 1008 =$
 $= 2 \cdot [2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1008) - 1008] + 6 \cdot 1008 = 2 \cdot (2 \cdot 1008 \cdot 1009 : 2 - 1008) + 6 \cdot 1008 =$
 $= 2 \cdot (1008 \cdot 1009 - 1008) + 6 \cdot 1008 = 1008 \cdot 2 \cdot (1009 - 1 + 3) = 2016 \cdot 1011 = 2038176$ 2p

c) $\frac{6}{f(x)} < 1 \Leftrightarrow \frac{6}{2x+6} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{2x+6} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x < 0 \\ 2x+6 > 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} -2x > 0 \\ 2x+6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x < 0 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, \infty) \cup (-\infty, -3)$. 5p

III. a) $A_t = 2 \cdot (AB \cdot AA' + BC \cdot AA' + AB \cdot BC) = 19200 \text{ cm}^2 \Rightarrow 160 \cdot BC = 4800 \text{ cm} \Rightarrow BC = 30 \text{ cm}$ 5p

Pentru că $\frac{AB}{4 \text{ cm}} = 30, \frac{AA'}{4 \text{ cm}} = 10$, dar $\frac{BC}{4 \text{ cm}} = 7 \frac{1}{2}$ deducem că în cutie, încap $30 \cdot 7 \cdot 10 = 2100$ cuburi. 5p

b) $AB \perp AD, AB \perp AA', AD \cap AA' = \{A\} \Rightarrow AB \perp (ADA')$, dar $AD' \subset (ADA')$, deci $AB \perp AD'$ 5p

$BD' = d = \sqrt{AB^2 + BC^2 + AA'^2} = 130 \text{ cm}, \Delta ADD', m(\angle ADD') = 90^\circ \xRightarrow{T. Pitagora} AD' = 50 \text{ cm},$

$d(A, BD') = \text{înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în } \Delta ABD' = \frac{AB \cdot AD'}{BD'} = \frac{600}{13} \text{ cm.}$ 5p



IV. a) $\mathcal{A}_l = 4 \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ 5p

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 100(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2 \quad 2p$$

Sunt necesare $0,5 \cdot 100(1 + \sqrt{3}) \text{ g} = 50(1 + \sqrt{3}) \text{ g}$ vopsea. 3p

Ajung 136,6 mg vopsea $\Leftrightarrow 50(1 + \sqrt{3}) < 136,6 \Leftrightarrow 50\sqrt{3} < 86,6 \Leftrightarrow$ 5p

$\Leftrightarrow \sqrt{7500} < \sqrt{86,6^2} \Leftrightarrow 7500 < 7499,56$ (fals). Deci nu ajung 136,6 g vopsea. 5p