CONCURSUL DE MATEMATICĂ
„OLIMPIADA SATELOR DIN TRANSILVANIA”
etapa interjudeţeană, 25.04.2015,
Şcoala Gimnazială „Enea Grapini” Şanţ
Barem clasa a VII - a

<u>SUBIECTUL I</u>. *(20 puncte)*

a) Se consideră numărul real $a=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$. ***Calculaţi*** a^3.

<u>Soluţie</u>

$a^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2+\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2-2\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}}=$ $=4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}=8-2\sqrt{16-7}=8-2\sqrt{9}=8-$ $-2\cdot 3=8-6=2$.	***4p***
$\sqrt{4-\sqrt{7}}<\sqrt{4+\sqrt{7}}$ **,** deci $a<0$.	***2p***
Atunci $a=-\sqrt{2}$**,** deci $a^3=-2\sqrt{2}$.	***2p***

b) La concursul de matematică „*Olimpiada Satelor din Transilvania – ediţia 2015****”, la clasa a VII-a, participă*** $\sqrt{\overline{abc}}+1$ ***elevi.***
Determinaţi numărul participanţilor ştiind că numărul $\overline{abc}$ ***îndeplineşte condiţia:***

$$\sqrt{\overline{ab}+\overline{bc}}=c\ .$$

<u>Soluţie</u>

Numărul $\overline{abc}$ este pătrat perfect, deci $c\in\{1;4;5;6;9\}$	***2p***
Deoarece $\overline{ab}+\overline{bc}\geq 20$ rezultă că $c\in\{5;6;9\}$.	***2p***
Din $\sqrt{\overline{ab}+\overline{bc}}=c$ rezultă $\overline{ab}+\overline{bc}=c^2$.	***2p***
Dacă $c=9$, rezultă $\overline{ab}+\overline{b9}=81$, de unde $b=2$ şi $a=5$ rezultând $\overline{abc}=529$ care este pătrat perfect.	***2p***
Dacă $c\in\{5;6\}$ nu se obţin soluţii.	***2p***
Prin urmare, la concurs au participat $\sqrt{529}+1=23+1=24$ de elevi de clasa a VII-a.	***2p***

SUBIECTUL II. ***(20 puncte)***

Se consideră mulțimea

$$\boldsymbol{A} = \{x = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \mid a, b, c \in \mathbb{N}^*, a \neq b \neq c \neq a\}.$$

a) Să se arate că, pentru orice numere $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

b) Aflați cel mai mic element al mulțimii A.

Soluţie

a) Se arată prin calcul algebric simplu	***5p***
b) $a, b, c \in \mathbb{N}^*, a \neq b \neq c \neq a$ $x = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$	***3p***
Expresia fiind simetrică în a, b, c, putem presupune că $a < b < c$.	***3p***
Atunci $b \geq a + 1$ și $c \geq a + 2$, deci $a - b \leq -1, a - c \leq -2, b - c \leq -1$	***3p***
și atunci $x \geq \frac{1}{2}[1^2 + 1^2 + 2^2] = 3$	***3p***
Deci cel mai mic element al mulțimii $\boldsymbol{A}$ este $x = 3$ și se obține când a, b, c sunt numere naturale consecutive.	***3p***

SUBIECTUL III. ***(20 puncte)***

Se consideră triunghiul dreptunghic *ABC*, ***cu*** $m(\hat{A}) = 90°$, $AD \perp BC$ ***și*** $AD = 60\ cm$.

Aria triunghiului *ABC* ***este egală cu aria unui pătrat cu diagonala de*** $50\sqrt{3}\,cm$.

a) Să se calculeze perimetrul și aria triunghiului.

b) Dacă $DM \perp AB, M \in [AB]$ ***și*** $DN \perp AC, N \in [AC]$, ***aflați aria patrulaterului*** *AMDN*.

Soluţie

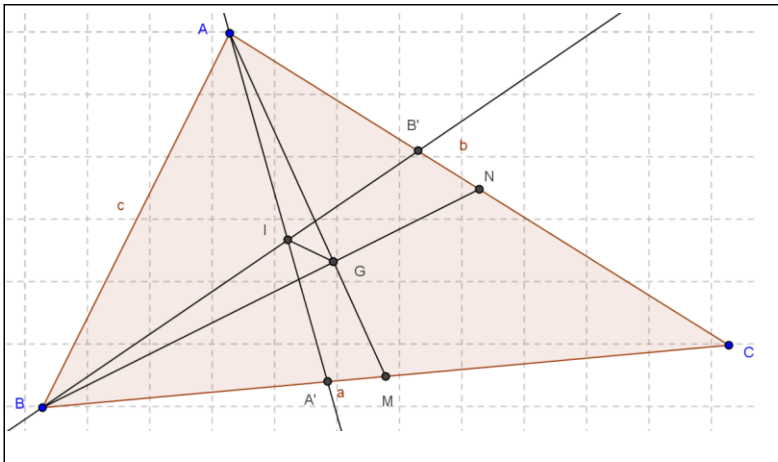
Latura unui pătrat cu diagonala de $50\sqrt{3}\,cm$ este de $25\sqrt{6}\,cm$.	***2p***
$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = (25\sqrt{6})^2 = 3750\ cm^2$.	***2p***
$2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC} = BC \cdot AD = BC \cdot 60 = 7500, deci\ BC = 125\ cm.$	***2p***
Construim mediana corespunzătoare ipotenuzei, $AM = \frac{1}{2}BC = 62{,}5\ cm$.	***2p***
Cu Teorema lui Pitagora în triunghiul *ADM*, cu$m(\widehat{D}) = 90°$, avem $DM = 17{,}5\ cm$.	***2p***
Atunci $DC = DM + MC = 17{,}5 + 62{,}5 = 80(cm)$și $BD = 45\ cm$.	***2p***
Cu Teorema catetei sau Teorema lui Pitagora se află $AB = 75\ cm$ și $AC = 100\ cm$.	***2p***
Deci $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 300\ cm$.	***2p***
Cu a doua teoremă a înălțimii se calculează $DM = 36\ CM$ și $DN = 48\ cm$.	***2p***
Aria dreptunghiului *AMDN* este egală cu *1728* cm^2.	***2p***

SUBIECTUL IV. ***(20 puncte)***

Demonstrați că într-un triunghi oarecare** ABC **dreapta** GI **este paralelă cu o latură dacă și numai dacă lungimea acelei laturi este media aritmetică a celorlalte două.

Se notează cu G punctul de intersecție al medianelor (centrul de greutate al triunghiului) și cu I punctul de intersecție al bisectoarelor (centrul cercului înscris în triunghi).

Soluție

	În figura alăturată considerăm triunghiul *ABC* oarecare având laturile de lungimi $a > b > c$.	***2p***
	Medianele *AM* și *BN* se intersectează în *G*, iar bisectoarele AA' și BB' se intersectează în *I*. $\frac{BG}{GN} = \frac{2}{1}$ (1)	***2p*** ***2p***
În $\Delta ABB'$, T. bisectoarei $\Rightarrow \frac{BI}{IB'} = \frac{c}{AB'}$.		***2p***
În $\Delta ABC,$ T. bisectoarei $\Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AB'}{b} = \frac{c}{a+c} \Rightarrow AB' = \frac{bc}{a+c}$.		***4p***
Atunci $\frac{BI}{IB'} = \frac{c}{\frac{bc}{a+c}} = \frac{c(a+c)}{bc} = \frac{a+c}{b}$. (2)		***4p***
Avem $\frac{a+c}{b} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ (3)		***2p***
Din relațiile (1) și (2) și (3), conform Reciprocei Teoremei lui Thales în $\Delta BNB'$, reiese că $GI \parallel AC \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ ceea ce trebuia demonstrat.		***2p***

Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.