CONCURSUL DE MATEMATICĂ
„OLIMPIADA SATELOR DIN TRANSILVANIA”
etapa interjudeţeană, 25.04.2015,
Şcoala Gimnazială „Enea Grapini” Şanţ
Barem clasa a VI-a

1. *Un număr natural* $n \geq 2$ *se numeşte „plin de putere” dacă fiecare factor prim din descompunerea sa apare la o putere strict mai mare decât 1.*
   a) *Arătaţi că* $4 \cdot 8 \cdot (8+1)+1$ *este plin de putere.*
   b) *Să se găsească un număr natural* $n, n \geq 10$ *cu proprietatea că* n *şi* $n+1$ *sunt numere „pline de putere”.*
   c) *Arătaţi că există cinci numere naturale consecutive mai mari decât 1000, care au suma un număr „plin de putere”.*

   SOLUŢIE:
   a) $4 \cdot 8 \cdot (8+1)+1 = 32 \cdot 9 + 1 = 17^2$ 3P
   b) $4 \cdot 8 \cdot (8+1) = 2^5 \cdot 3^2$ şi $4 \cdot 8 \cdot (8+1)+1 = 17^2$ 5P
   $\Rightarrow n = 288.$ 2P
   c) $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) = 5(n+2) > 5010$ 5P
   $5^5 = 3125, 5^6 = 15625$
   Atunci pentru $n = 3123$, avem $5(n+2) = 5^6$ un număr „*plin de putere*”. 5P

2. *Cei n elevi ai unei şcoli,* $750 < n < 820$*, se află pe terenul de sport. Dacă elevii se încolonează câte 13, atunci rămân 10 elevi neîncolonaţi; dacă elevii se încolonează câte 6, atunci rămân neîncolonaţi 2 elevi. Determinaţi numărul n.*

   SOLUŢIE:
   $n = 13k + 10, k$ număr natural şi $n = 6p + 2,\ p$ număr natural.....................................2P
   $n + 16 = 13k + 26 = \mathcal{M}_{13}$ şi $n + 16 = 6p + 18 = \mathcal{M}_6$. 4P
   $n + 16$ este un multiplu comun pentru 13 şi 6. ....4P
   $[13,\ 6] = 78$ avem $n + 16 = 78r,\ r$ număr natural, de unde $n = 78r - 16$. 4P
   $750 < n < 820$ avem $750 < 78r - 16 < 820$, de unde obţinem $r = 10$ 4P
   Numărul căutat este 764. ....2P

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

3. *Preţul biletului la un spectacol se micşorează cu 20%. Să se afle cu ce procent trebuie să crească numărul spectatorilor pentru ca încasările să rămână neschimbate.*

SOLUŢIE:
Notăm *n* – numărul spectatorilor, *x* – preţul biletului şi *p* – procentul cu care ar trebui să crească numărul spectatorilor 3P
$\left(n+\frac{p}{100}\cdot n\right)\left(x-\frac{20}{100}x\right)=nx$ 5P
$nx\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{80}{100}=nx$ 5P
$\frac{100+p}{100}\cdot\frac{4}{5}=1$ 5P
$p=25$ 2P

4. *Fie triunghiul ABC în care măsura unghiului exterior unghiului C este jumătate din măsura unghiului exterior B şi cu* $40°$ *mai mic decât măsura unghiului exterior unghiului A. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC.*

SOLUŢIE:
$m(\sphericalangle B_{ext})=2\cdot m(\sphericalangle C_{ext})$. 2P
$m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle C)=2\cdot[m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)]=2\cdot[180°-m(\sphericalangle C)]$ 4P
$m(\sphericalangle A)+3\cdot m(\sphericalangle C)=360°$. ***(1)*** **..**2P
$m(\sphericalangle C_{ext})=m(\sphericalangle A_{ext})-40°$. 2P
$m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)-40°$ 2P
$m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle C)-40°$. ***(2)*** **...**2P
Din ***(1)*** şi ***(2)*** obţinem $m(\sphericalangle C)=100°$, $m(\sphericalangle A)=60°, m(\sphericalangle B)=20°$. 6P

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro