Language: **Romanian**

Day: **1**

Joi, 16 aprilie 2015

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi D piciorul înălţimii din C. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ taie CD în E şi taie a doua oară cercul ω circumscris triunghiului ADE în F. Dacă $\angle ADF = 45^\circ$, arătaţi că dreapta CF este tangentă la ω.

Problema 2. Un *domino* este o piesă 2×1 sau 1×2. Determinaţi în câte feluri putem aşeza, fără suprapuneri, exact n^2 dominouri pe o tablă de şah $2n \times 2n$, astfel încât orice pătrat al tablei având dimensiunile 2×2 să conţină cel puţin două pătrate-unitate neacoperite, care să fie situate pe aceeaşi linie sau aceeaşi coloană.

Problema 3. Fie n, m numere întregi mai mari ca 1 şi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ numere întregi strict pozitive, care nu depăşesc n^m. Demonstraţi că există numerele întregi strict pozitive $b_1, b_2, \ldots, b_m$, care nu depăşesc n, astfel încât

$$\text{c.m.m.d.c.}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

unde $\text{c.m.m.d.c.}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ desemnează cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Vineri, 17 aprilie 2015

Problema 4. Determinaţi dacă există un şir infinit de numere întregi strict pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots$, care să îndeplinească egalitatea

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

pentru orice număr întreg strict pozitiv n.

Problema 5. Fie m, n numere întregi strict pozitive, cu $m > 1$. Anastasia partiţionează numerele întregi $1, 2, \ldots, 2m$ în m perechi. Boris alege apoi câte un număr din fiecare pereche şi află suma numerelor alese. Demonstraţi că Anastasia poate forma perechile astfel încât Boris să nu poată obţine o sumă egală cu n.

Problema 6. Fie H ortocentrul şi G centrul de greutate al triunghiului ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq AC$. Dreapta AG taie cercul circumscris triunghiului ABC în A şi P. Fie P' simetricul lui P faţă de dreapta BC. Demonstraţi că $\angle CAB = 60°$ dacă şi numai dacă $HG = GP'$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte