Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Primul test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 9 aprilie 2015

Problema 1. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $AB \neq AC$, M mijlocul laturii $[BC]$, H ortocentrul triunghiului ABC, O_1 mijlocul lui $[AH]$, iar O_2 centrul cercului circumscris triunghiului BCH. Demonstraţi că O_1AMO_2 este paralelogram.

Soluţie. Cercul circumscris triunghiului este simetricul cercului circumscris triunghiului ABC faţă de BC, prin urmare O_2 este simetricul lui O faţă de BC. Se ştie că $AO_1 = MO = MO_2$ şi, cum $AO_1 \parallel MO_2$, rezultă concluzia.

Problema 2. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care, oricum am colora în roşu n dintre vârfurile unui cub, există un vârf al cubului care are cele trei vârfuri alăturate roşii.

Soluţie. Vom demonstra că numărul căutat este 5.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Colorând în roşu cele 4 vârfuri ale unei feţe a cubului, fie ele de exemplu A, B, C, D, nu există niciun vârf care să aibă cele trei vârfuri alăturate roşii, deci $n \geq 5$.

Acum, pentru $n = 5$, oricum am colora n vârfuri cu roşu, unul din planele $(ABCD)$ şi $(A'B'C'D')$ va avea cel puţin trei vârfuri roşii. Putem presupune că A, B, C sunt roşii. Dacă şi D este roşu, atunci avem un singur vârf roşu în planul $(A'B'C'D')$. Dacă X' este vârful roşu, cu $X \in \{A, B, C, D\}$, atunci vârful X are toţi vecinii roşii.

Dacă D nu este roşu, atunci 'in planul $(A'B'C'D')$ avem două vârfuri roşii. Dacă B' sau D' este roşu, atunci B, respectiv D, are toţi vecinii roşii. În caz contar, A' şi C' sunt roşii şi atunci B' are toţi vecinii roşii.

În concluzie, oricum am colora 5 dintre vârfuri cu roşu, va exista cel puţin un vârf care are toţi vecinii roşii, deci minimul căutat este $n = 5$.

Problema 3. Fie $x, y, z > 0$. Arătaţi că $\dfrac{x^3}{z^3 + x^2y} + \dfrac{y^3}{x^3 + y^2z} + \dfrac{z^3}{y^3 + z^2x} \geq \dfrac{3}{2}$.

Soluţie. Cu inegalitatea mediilor avem $x^2y \leq \dfrac{x^3 + x^3 + y^3}{3}$, de unde rezultă că

$$\frac{x^3}{z^3 + x^2y} \geq \frac{x^3}{z^3 + \dfrac{x^3 + x^3 + y^3}{3}} = \frac{3x^3}{2x^3 + y^3 + 3z^3}$$

şi analoagele.

Sumând şi notând $x^3 = a$, $y^3 = b$, $z^3 = c$, este suficient să demonstrăm că

$$\frac{a}{2a + b + 3c} + \frac{b}{3a + 2b + c} + \frac{c}{a + 3b + 2c} \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce se obţine din

$$\sum \frac{a}{2a+b+3c} = \sum \frac{a^2}{2a^2+ab+3ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)} = \frac{1}{2}.$$

Problema 4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $21^x + 4^y = z^2$.

Soluţie. Avem $(z-2^y)(z+2^y) = 21^x$ şi, notând $d = (z-2^y, z+2^y)$, rezultă că $d \mid (z+2^y)-(z-2^y)$, deci $d \mid 2^{y+1}$. Întrucât $d \mid z+2^y$ şi $z+2^y \mid 21^x$, rezultă $d \mid (2^{y+1}, 21^x)$, deci $d=1$.

Ca urmare, avem de analizat două cazuri: $z-2^y = 1$ şi $z+2^y = 21^x$, respectiv $z-2^y = 3^x$ şi $z+2^y = 7^x$.

În primul caz obţinem $21^x - 1 = 2^{y+1}$, egalitate care nu poate avea loc, deoarece divide $5 \mid 21^x - 1$ şi $5 \nmid 2^{y+1}$.

În al doilea caz avem $7^x - 3^x = 2^{y+1}$, pentru care se observă că $x=0$ nu convine, iar $x=1$ conduce la soluţia $(1,1,5)$. Studiem în continuare cazul $x \geq 2$.

Dacă x este impar putem scrie:

$$2^{y-1} = 7^{x-1} + 7^{x-2}\cdot 3 + 7^{x-3}\cdot 3^2 + ... + 7\cdot 3^{x-2} + 3^{x-1},$$

contradicţie, deoarece membrul drept este o suma unui număr impar de numere impare.

Pentru x par, $x=2s$, $s \geq 1$, rezultă $49^s - 9^s = 2^{y+1}$, egalitate care nu poate avea loc deoarece $5 \mid 49^s - 9^s$.

În concluzie, singura soluţie este $(1,1,5)$.

Problema 5. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu diagonalele neperpendiculare şi laturile AB şi CD neparalele. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor, H_1 ortocentrul triunghiului AOB şi H_2 ortocentrul triunghiului COD. Se notează cu M mijlocul laturii $[AB]$ şi cu N mijlocul laturii $[CD]$. Arătaţi că H_1H_2 este paralelă cu MN dacă şi numai dacă $AC=BD$.

Soluţie. Fie A' şi B' picioarele înalţimilor din A, respectiv din B în triunghiul AOB, şi C', D' picioarele înalţimilor din C, respectiv D în triunghiul COD.

Evident, A' şi D' aparţin cercului $\mathcal{C}_1$ de diametru AD, iar B' şi C' aparţin cercului $\mathcal{C}_2$ de diametru BC.

Se observă că triunghiurile H_1AB şi $H_1A'B'$ sunt asemenea, de unde $H_1A \cdot H_1A' = H_1B \cdot H_1B'$. Atunci H_1 are aceeaşi putere în raport cu cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, deci H_1 (şi analog, H_2) se află pe axa radicală a celor două cercuri.

Întrucat axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor, rezultă că H_1H_2 este perpendiculară pe dreapta PQ, unde P şi Q sunt mijloacele laturilor AD, respectiv BC (P şi Q sunt centrele cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$).

Condiţia $H_1H_2 \parallel MN$ este echivalentă cu $MN \perp PQ$. Cum $MPNQ$ este paralelogram, avem:

$$H_1H_2 \parallel MN \Leftrightarrow MN \perp PQ \Leftrightarrow MPNQ \text{ este romb} \Leftrightarrow MP = MQ \Leftrightarrow AC = BD.$$