Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a XII-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea că, pentru orice element $x \in R$, există două elemente e_1 şi e_2 din R, astfel încât $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ şi $x = e_1e_2$. Arătaţi că:
(a) 1 este singurul element inversabil al inelului R; şi
(b) $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in R$.

Soluţie. **(a)** Fie $x \in U(R)$ şi $e_1, e_2 \in I(R) = \{e \in R \,|\, e^2 = e\}$, cu $x = e_1e_2$. Atunci

$$1 - e_1 = (1-e_1)\cdot 1 = (1-e_1)e_1e_2x^{-1} = (e_1 - e_1^2)e_2x^{-1} = 0,$$

deci $e_1 = 1$ şi $x^2 = e_2^2 = e_2 = x$. Cum x este inversabil, rezultă că $x = 1$ şi deci $U(R) = \{1\}$.
. . . . **3 puncte**

(b) R nu conţine elemente nilpotente nenule, deoarece pentru orice nilpotent $x \in R$, elementul $1-x$ este inversabil ($x^k = 0$, deci $(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) = 1$), deci $1 - x = 1$ şi $x = 0$. **1 punct**

Arătăm că $I(R) \subseteq Z(R)$. Fie $e \in I(R)$ şi $x \in R$ oarecare. Atunci

$$(ex - exe)^2 = exex - exexe - exeex + exeexe = exex - exex - exexe + exexe = 0,$$

deci $ex = exe$. Analog obţinem $xe = exe$ şi deci $ex = exe = xe$, oricare ar fi $e \in I(R)$ şi oricare ar fi $x \in R$. . . . . **2 puncte**

Fie $x \in R$ şi $e_1, e_2 \in I(R)$, cu $x = e_1e_2$. Atunci $x^2 = (e_1e_2)^2 = e_1^2e_2^2 = e_1e_2 = x$.
. . . . **1 punct**

Problema 2. Fie $(K,+,\cdot)$ un corp finit cu cel puţin patru elemente. Arătaţi că mulţimea K^* poate fi partiţionată în două submulţimi nevide A şi B, cu proprietatea că

$$\sum_{x\in A} x = \prod_{y \in B} y.$$

Soluţie. Deoarece $\prod_{x\in K^*} x = -1$, dacă A şi B formează o partiţie a lui K^*, atunci $\left(\prod_{x\in A} x\right)\left(\prod_{x\in B} x\right) = -1$, deci $\sum_{x\in A} x = \prod_{y\in B} y$ dacă şi numai dacă

$$\left(\sum_{x\in A} x\right)\cdot\left(\prod_{x\in A} x\right) = -1. \qquad (*)$$

. . . . **1 punct**

Fie $q = |K|$. Cum toate rădăcinile polinomului $f = X^{q-1} - 1 \in K[X]$ sunt distincte şi situate în K^*, rezultă că orice divizor al lui f are aceeaşi proprietate. .... **1 punct**

Dacă $\operatorname{char} K = 2$, atunci $1 = -1$ şi mulţimea $A = \{1\}$ are proprietatea $(*)$. .... **1 punct**

Fie acum $\operatorname{char} K > 2$. Dacă $q \equiv 1 \pmod 4$, atunci $X^4 - 1 \mid X^{q-1} - 1$. Cum $X^2 + 1 \mid X^4 - 1$, rezultă că $X^2 + 1 \mid X^{q-1} - 1$, deci există $a \in K^*$, astfel încât $a^2 = -1$. Mulţimea $A = \{a\}$ are proprietatea $(*)$. .... **2 puncte**

Dacă $q \not\equiv 1 \pmod 4$, cum $q - 1$ este un număr par mai mare sau egal cu 6, rezultă că $q - 1$ are un divizor impar $t > 1$. Cum $g = X^{t-1} + X^{t-2} + \cdots + X + 1$ divide f, polinomul g are toate rădăcinile $a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}$ distincte şi în K^*. Deoarece $a_1 + a_2 + \cdots + a_{t-1} = -1$, iar $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{t-1} = (-1)^{t-1} = 1$, mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots a_{t-1}\}$ are proprietatea $(*)$.

.... **2 puncte**

Problema 3. Fie $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, de două ori derivabile pe $[0,1]$, care au cel puţin două zerouri, nu neapărat distincte, în $[0,1]$ şi $|f''(x)| \le 1$, oricare ar fi x în $[0,1]$. Determinaţi valoarea maximă pe care o poate lua integrala

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

când f parcurge mulţimea $\mathcal{C}$, şi funcţiile care realizează acest maximum.
(O funcţie derivabilă f are două zerouri într-un acelaşi punct a, dacă $f(a) = f'(a) = 0$.)

Soluţie. Dacă există $a \in [0,1]$, astfel încât $f(a) = f'(a) = 0$, considerăm $x \in [0,1]$, $x \neq a$. Atunci $f(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\theta)$, pentru un anumit θ între a şi x. Deoarece $|f''(t)| \le 1$, oricare ar fi t în $[0,1]$, rezultă că $|f(x)| \le \frac{1}{2}(x-a)^2$, relaţie evident adevărată şi în $x = a$, deci

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 (x-a)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(1 - 3a(1-a)) \le \frac{1}{6}.$$

.... **2 puncte**

Dacă există $a < b$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$, considerăm $x \in [0,1] \setminus \{a,b\}$, şi funcţia $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = (t-a)(t-b)f(x) - (x-a)(x-b)f(t)$. Această funcţie este de două ori derivabilă pe $[0,1]$ şi are trei zerouri distincte, a, b şi x. Din teorema lui Rolle aplicată de două ori, rezultă că g'' are un zero θ în intervalul deschis $(0,1)$. Rezultă că $f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\theta)$, deci $|f(x)| \le \frac{1}{2}|x-a|\cdot|x-b|$, relaţie evident adevărată şi pentru $x = a$ şi $x = b$. Atunci

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 |x-a|\cdot|x-b|\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6} - \frac{a+b}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{(b-a)^3}{6}\\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}a(1-b) - \frac{1}{12}(b-a)\left(3 - 2(b-a)^2\right) < \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

.... **3 puncte**

Egalitatea are loc numai în primul caz, pentru $a = 0$ sau $a = 1$. Din continuitatea funcţiilor din $\mathcal{C}$, rezultă că funcţiile f, care realizează egalitatea, sunt cele pentru care $|f(x)| = x^2/2$, $0 \le x \le 1$, sau $|f(x)| = (1-x)^2/2$, $0 \le x \le 1$. Deci funcţiile cerute sunt $f_1(x) = x^2/2$, $f_2(x) = (1-x)^2/2$ şi opusele lor.

. . . . **2 puncte**

Remarcă. Funcţia g provine din următoarea interpolare Lagrange. Fie n un număr natural nenul, fie $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ puncte într-un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ şi fie f o funcţie reală derivabilă de n ori pe I. Atunci

$$f^{(n)}(\theta) = n! \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j}, \qquad (**)$$

unde θ este un punct interior al lui I. În particular, dacă f se anulează în n dintre a_i-uri, e.g., în a_0, …, a_{k-1}, a_{k+1}, …, a_n, atunci

$$f(a_k) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta) \prod_{j \neq k} (a_k - a_j).$$

Pentru a demonstra $(**)$, considerăm funcţia reală g definită pe I,

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = f(x) - \left(\sum_{i=0}^{n} f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} \right) x^n + \cdots .$$

Această funcţie este de n ori derivabilă pe I şi are $n+1$ zerouri distincte în I, anume, a_0, a_1, …, a_n. Conform teoremei lui Rolle, g' are n zerouri distincte în interiorul lui I, câte unul în fiecare dintre intervalele deschise (a_i, a_{i+1}), $i = 0, \ldots, n-1$. Aplicând teorema lui Rolle derivatei g', rezultă că g'' are $n-1$ zerouri disitncte în interiorul lui I şi aşa mai departe. În final, $g^{(n)}$ are un zero θ în interiorul lui I, de unde concluzia.

Problema 4. Determinaţi funcţiile polinomiale neconstante $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^*$, cu coeficienţi raţionali, care au următoarea proprietate: oricare ar fi x în intervalul $[0,1]$, există două funcţii polinomiale $g_x, h_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, cu coeficienţi raţionali, astfel încât $h_x(x) \neq 0$ şi

$$\int_0^x \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t = \frac{g_x(x)}{h_x(x)}.$$

Soluţie. Deoarece intervalul închis $[0,1]$ este nenumărabil şi mulţimea funcţiilor polinomiale cu coeficienţi raţionali este numărabilă, există o mulţime nenumărabilă $S \subseteq [0,1]$ şi două funcţii polinomiale coprime $g, h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, cu coeficienţi raţionali, astfel încât $h(x) \neq 0$ şi

$$\int_0^x \frac{1}{f(t)}\, \mathrm{d}t = \frac{g(x)}{h(x)},$$

oricare ar fi x în S. . . . . **1 punct**

Deoarece mulţimea punctelor izolate ale lui S este cel mult numărabilă, rezultă că există o infinitate de puncte în S, care sunt puncte de acumulare ale lui S. În fiecare dintre aceste puncte, funcţiile raţionale $1/f$ şi $(g/h)' = (g'h - gh')/h^2$ sunt egale, deci

$$h^2 = f \cdot (g'h - gh') \qquad (*)$$

în $\mathbb{Q}[X]$. . . . . **2 puncte**

Întrucât $\deg f \geq 1$, rezultă că $\deg g \leq \deg h$. Dacă $\deg g = \deg h$, atunci şi restul împărţirii lui g la h verifică $(*)$ şi este coprim cu h, deci putem presupune că $\deg g < \deg h$ şi, prin urmare, $\deg(g'h - gh') = \deg g + \deg h - 1$.

Dacă $\deg h \geq 2$, cum g şi h sunt coprime, orice rădăcină de ordin k a lui $g'h - gh'$ este rădăcină a lui h, de ordin mai mare sau egal cu $k+1$. Deci $\deg h \geq \deg g + \deg h - 1 + d$, unde d este numărul de rădăcini distincte ale lui $g'h - gh'$. Prin urmare, $d = 1$, $\deg g = 0$, de unde, $h = a(X-b)^m$, unde $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q} \setminus [0,1]$, iar m este un număr natural mai mare sau egal cu 2. Rezultă că $f = c(X-b)^{m+1}$, unde c este un număr raţional nenul.

Dacă $\deg h = 1$, atunci $\deg g = 0$ şi $f = c(X-b)^2$, unde b şi c sunt ca mai sus.

În concluzie, funcţiile cerute sunt cele de forma $f(x) = c(x-b)^n$, $0 \leq x \leq 1$, unde $c \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q} \setminus [0,1]$ şi n este un număr natural mai mare sau egal cu 2, funcţii care îndeplinesc în mod evident condiţia din enunţ. .... **4 puncte**