Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi
Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a XI-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:
i) $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$;
ii) pentru $x \in \mathbb{R}$, dacă $f'(x) = 0$, atunci $f(x) = 0$.

Soluţie. Funcţia identic nulă verifică condiţiile din enunţ. .... **1 punct**
Presupunem că există o funcţie derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, neidentic nulă, care satisface (i) şi (ii).
Atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, cu $f(x) = f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. .... **1 punct**
Există $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x_0) \neq 0$. Fie $k = [x_0] \in \mathbb{Z}$. .... **1 punct**
Conform Teoremei lui Weierstrass, f este mărginită pe intervalul $[k, k+1]$ şi există $x_1, x_2 \in [k, k+1]$ astfel ca

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \ \forall\, x \in [k, k+1].$$

.... **2 puncte**

Dacă $f(x_0) > 0$, atunci $f(x_2) > 0$. Deci $x_2 \in (k, k+1)$ este un punct de maxim local pentru f, de unde, conform Teoremei lui Fermat, $f'(x_2) = 0$. Atunci, conform (ii), $f(x_2) = 0$. Contradicţie.
Dacă $f(x_0) < 0$, atunci $f(x_1) < 0$. Dar $x_1 \in (k, k+1)$ este un punct de minim local pentru f, deci $f'(x_1) = 0$, de unde $f(x_1) = 0$. Contradicţie.
Deci funcţia identic nulă este unica funcţie care satisface condiţiile din enunţ. .... **2 puncte**

Problema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ o matrice cu $\mathrm{tr(A)} = 0$ şi cu proprietatea că $I_5 - A$ este inversabilă. Să se arate că $A^5 \neq I_5$.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că $A^5 = I_5$. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei A (o soluţie a ecuaţiei $\det(xI_5 - A) = 0$). Cum λ^5 este o valoare proprie a matricei A^5, obţinem $\lambda^5 = 1$. .... **1 punct**
Matricea $I_5 - A$ este inversabilă, deci $\det(I_5 - A) \neq 0$. În consecinţă, valorile proprii ale matricei A se găsesc în mulţimea $\{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\}$, unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. .... **1 punct**
Atunci, din condiţia $\mathrm{tr}(A) = 0$, deducem că există numerele naturale a, b, c şi d cu proprietăţile

$$\begin{cases} a + b + c + d = 5 \\ a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + d\varepsilon^4 = 0 \end{cases}$$

.... **2 puncte** Din ultima relaţie obţinem $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 = 0$. Rezultă că ε este o rădăcină a polinomului cu coeficienţi întregi, de grad cel mult 3, $dX^3 + cX^2 + bX + a$. Dacă $d \neq 0$, atunci polinomul are rădăcinile $\varepsilon, \overline{\varepsilon} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dar, din relaţiile lui Viète, obţinem $\alpha = -a/d \in \mathbb{Q}$ şi $\alpha = -(c/d + 2\cos(2\pi/5)) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Contradicţie. Deci $d = 0$. .... **2 puncte**
În mod analog analog arătăm $c = b = a = 0$. Atunci $a+b+c+d = 0$, în contradicţie cu $a+b+c+d = 5$.
1 punct

Observaţie. Argumentul din finalul demonstraţiei se poate obţine ş folosind proprietatea că polinomul nenul de grad minim, cu coeficienţi întregi, care are ca rădăcină pe ε este polinomul ciclotomic $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Problema 3. Fie $a \geq 0$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. Să se arate că dacă şirul $(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n^a})_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n = \frac{x_1}{1^b} + \frac{x_2}{2^b} + \cdots + \frac{x_n}{n^b}$, este convergent pentru orice $b > a$.

Soluţie. Notăm $S_n = \sum_{k=1}^n x_k,\ n \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei, există $c > 0$ astfel ca $|S_n| \leq cn^a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. .... **1 punct**

Pentru $n, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$|y_{n+p} - y_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_k}{k^b}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{S_k - S_{k-1}}{k^b}\right| =$$

$$= \left|\frac{S_{n+p}}{(n+p+1)^b} - \frac{S_n}{(n+1)^b} + \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k\left(\frac{1}{k^b} - \frac{1}{(k+1)^b}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{|S_{n+p}|}{(n+p+1)^b} + \frac{|S_n|}{(n+1)^b} + \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k|\left(\frac{1}{k^b} - \frac{1}{(k+1)^b}\right) \leq$$

$$\leq c\left[\frac{2}{n^{b-a}} + \sum_{k=n+1}^{n+p} k^a\left(\frac{1}{k^b} - \frac{1}{(k+1)^b}\right)\right].$$

.... **2 puncte**

Aplicând Teorema lui Lagrage funcţiei $f(x) = x^{-\alpha},\ x > 0$ pe $[i, i+1]$, unde $\alpha,\ i > 0$, obţinem inegalitatea dublă

$$\frac{\alpha}{(i+1)^{\alpha+1}} < \frac{1}{i^\alpha} - \frac{1}{(i+1)^\alpha} < \frac{\alpha}{i^{\alpha+1}}.$$

.... **1 punct**

În particular, cum $b,\ b-a > 0$, avem

$$\frac{1}{k^b} - \frac{1}{(k+1)^b} < \frac{b}{k^{b+1}} \text{ şi } \frac{b-a}{k^{b-a+1}} < \frac{1}{(k-1)^{b-a}} - \frac{1}{k^{b-a}},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$$

Atunci

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} k^a\left(\frac{1}{k^b} - \frac{1}{(k+1)^b}\right) < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{bk^a}{k^{b+1}} = \frac{b}{b-a}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{b-a}{k^{b-a+1}} <$$

$$< \frac{b}{b-a}\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{(k-1)^{b-a}} - \frac{1}{k^{b-a}}\right) = \frac{b}{b-a}\left(\frac{1}{n^{b-a}} - \frac{1}{(n+p)^{b-a}}\right) < \frac{b}{(b-a)n^{b-a}}.$$

Rezultă

$$|y_{n+p} - y_n| < c\left(2 + \frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{n^{b-a}},\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*.$$

....**2 puncte**
Ca urmare, din $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-(b-a)} = 0$, deducem că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este fundamental, deci convergent. ....**1 punct**

Problema 4. Matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, unde $m \geq n \geq 2$, au proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$a_k(AB)^k + a_{k-1}(AB)^{k-1} + \cdots + a_1(AB) + a_0 I_m = O_m,$$

iar

$$a_k(BA)^k + a_{k-1}(BA)^{k-1} + \cdots + a_1(BA) + a_0 I_n \neq O_n.$$

Demonstraţi că $a_0 = 0$.

Soluţie. Presupunem că $a_0 \neq 0$. Scriind egalitatea din ipoteză sub forma

$$AB\left(-\frac{a_k}{a_0}(AB)^{k-1} - \frac{a_{k-1}}{a_0}(AB)^{k-2} - \cdots - \frac{a_1}{a_0}I_m\right) = I_m$$

deducem că AB este inversabilă, deci rang(AB) = m $\geq$ n. ....**2 puncte**

Pe de altă parte, din inegalitatea rangurilor,

$$m = \text{rang(AB)} \leq \min\{\text{rangA}, \text{rangB}\} \leq \text{n}.$$

Aşadar $m = n$, iar A, B şi BA sunt matrice pătratice inversabile. ....**2 puncte**

Înmulţind egalitatea

$$a_k(AB)^k + a_{k-1}(AB)^{k-1} + \cdots + a_1(AB) + a_0 I_n = O_n$$

la stânga cu B şi la dreapta cu A obţinem

$$a_k(BA)^{k+1} + a_{k-1}(BA)^k + \cdots + a_0(BA) = O_n.$$

Prin înmulţire (la stânga sau la dreapta) cu $(BA)^{-1}$ rezultă

$$a_k(BA)^k + a_{k-1}(BA)^{k-1} + \cdots + a_0 I_n = O_n,$$

ceea ce contrazice ipoteza. ....**2 puncte**

Această contradicţie provine din faptul că am presupus $a_0 \neq 0$. Deci $a_0 = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ....**1 punct**