Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a X-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Să se găsească tripletele (a, b, c) de numere complexe nenule având acelaşi modul, care verifică egalitatea

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1=0.$$

Soluţie. Să observăm că $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{b}{a}$, deci prin conjugare, relaţia dată devine

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+1=0.$$

....(2 p)

Eliminând numitorii şi însumând relaţiile, obţinem

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+2abc=0,$$

....(2 p)

sau, echivalent,

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0,$$

....(2 p)

aşadar două dintre cele trei numere sunt opuse. Dacă avem, de exemplu, $a+b=0$, din relaţia iniţială deducem $c=a$ sau $c=b$, deci tripletele căutate sunt $(a, a, -a)$, cu $a \in \mathbb{C}^*$ (şi permutările). (1 p)

Problema 2. Se consideră un număr natural $k \geq 1$, numerele prime distincte $p_1, p_2, \ldots, p_k$ şi $n=p_1p_2\ldots p_k$. Pentru o funcţie

$$f:\{1,2,\ldots,n\} \rightarrow \{1,2,\ldots,n\},$$

notăm $p(f)=f(1)f(2)\ldots f(n)$.

a) Să se determine numărul funcţiilor f cu proprietatea că $p(f)$ divide n.

b) Pentru $n=6$, să se afle numărul funcţiilor f pentru care $p(f)$ divide 36.

Soluţie. a) Dacă $p(f)$ divide n, atunci $p(f)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$, unde $a_i \in \{0,1\}$. Deducem că un factor prim p_i fie nu divide $p(f)$, fie apare în descompunerea în factori primi a exact unuia dintre numerele $f(1)$, $f(2), \ldots, f(n)$. Astfel, pentru p_i avem $n+1$ posibilităţi de alegere. Rezultă că numărul de funcţii cu proprietatea cerută este $(n+1)^k$. .... (4 p)

b) Dacă $p(f)$ divide 36, atunci $p(f) = 2^a 3^b$, unde $a, b \in \{0, 1, 2\}$. Sunt $1 + C_6^2 + 2C_6^1$ astfel de funcţii pentru $b = 0$, $C_6^1 \left(1 + C_6^1 + C_5^1 + C_6^2\right)$ funcţii pentru $b = 1$, şi $C_6^2 \left(1 + C_6^1 + C_4^1 + C_6^2\right)$ funcţii pentru $b = 2$. În total obţinem 580 de funcţii. . . . . (3 p)

Problema 3. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ care verifică condiţiile:

$$f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + y,$$
$$g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

Soluţie. Dacă $g(y_1) = g(y_2)$, din prima relaţie obţinem $y_1 = y_2$, deci g este injectivă. Analog, f este injectivă. . . . . (1 p)

Pentru $y = 0$, prima relaţie devine $f(g(x) + g(0)) = f(g(x))$, deci $g(x) + g(0) = g(x)$, de unde $g(0) = 0$; analog, $f(0) = 0$. . . . . (1 p)

Înlocuind $x = 0$ în cele două relaţii, obţinem $f(g(y)) = g(f(y)) = y$, pentru orice y, aşadar f şi g sunt bijective şi $g = f^{-1}$. . . . . (1 p)

Relaţiile iniţiale devin

$$f(g(x) + g(y)) = x + y$$
$$g(f(x) + f(y)) = x + y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$, de unde, aplicând g, respectiv f,

$$g(x + y) = g(x) + g(y),$$
$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$. . . . . (1 p)

Notând $a = f(1)$, $b = g(1)$, se arată uşor că $f(x) = ax$, $g(x) = bx$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$. . . (1 p)

Cum $g = f^{-1}$, obţinem $ab = 1$.

În concluzie, funcţiile căutate sunt de forma

$$f(x) = ax, \quad g(x) = \frac{x}{a},$$

unde $a \in \mathbb{Q}^*$, ... (1 p)

care verifică evident condiţiile din ipoteză. . . . . (1 p)

Problema 4. Fie A o mulţime finită de numere reale. Considerăm mulţimile

$$S = \{x + y \mid x, y \in A\}, \quad D = \{x - y \mid x, y \in A\}.$$

Să se arate că

$$\text{card}(A) \cdot \text{card}(D) \leq (\text{card}(S))^2.$$

Soluţie. Vom defini o funcţie injectivă $f : A \times D \to S \times S$. . . . . (1 p)

Definim, pentru $a \in A$ şi $d \in D$

$$f(a, d) = (a + x_d, a + y_d),$$

unde $x_d, y_d \in A$ sunt alese astfel ca $x_d - y_d = d$ şi x_d să fie maxim posibil. Evident, pentru d dat, x_d şi y_d există şi sunt unice. . . . . (3 p)

Dacă $f(a,d) = f(a',d')$, atunci obţinem

$$a + x_d = a' + x_{d'},$$
$$a + y_d = a' + y_{d'},$$

de unde

$$x_d - y_d = x_{d'} - y_{d'},$$

deci $d = d'$ şi atunci şi $a = a'$. . . . . (2 p)

Deducem că f este injectivă, deci $\mathrm{card}(A \times D) \leq \mathrm{card}(S \times S)$, de unde $\mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(D) \leq (\mathrm{card}(S))^2$ . . . . (1 p)