Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a IX-a - soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Arătaţi că nu putem alege 45 de elemente distincte ale mulţimii $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2015}\}$, astfel încât numerele selectate să fie în progresie aritmetică.

Soluţie. Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\sqrt{m}, \sqrt{n}, \sqrt{p}$ sunt trei numere în progresie aritmetică, atunci $p + m + 2\sqrt{pm} = 4n$, deci $\sqrt{pm}$ este raţional. Rezultă $m = a^2d$, $p = c^2d$, $n = 2b^2d$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ şi $a + c = 2b$ **4p**

Astfel, dacă am putea alege 45 de numere în progresie aritmetică, atunci ele ar fi de forma $a_1\sqrt{d}, a_2\sqrt{d}, \ldots, a_{45}\sqrt{d}$, cu $a_1, a_2, \ldots, a_{45}, d \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_{45}$ în progresie aritmetică **2p**

În acest caz, cel mai mare număr ales ar fi cel puţin $\sqrt{45^2 d} \geq \sqrt{2025}$ – contradicţie **1p**

Problema 2. O funcţie f de gradul al doilea are proprietatea: pentru orice interval I de lungime 1, intervalul $f(I)$ are lungimea cel puţin 1.

Arătaţi că, pentru orice interval J de lungime 2, intervalul $f(J)$ are lungimea cel puţin 4.

Soluţie. Dacă $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi v este abscisa vârfului parabolei atunci, pentru intervalul $I = [v - 1/2, v + 1/2]$, intervalul $f(I)$ are lungimea $\frac{|a|}{4}$, deci $|a| \geq 4$ **3p**

Pentru un interval J de lungime 2 există $x, y \in J$ astfel încât $x - y = 1$ şi $v \notin (y, x)$ **2p**

Avem $|f(x) - f(y)| = |a(x-y)(x+y+\frac{b}{a})| \geq 4|x+y-2v| \geq 4$, deci intervalul $f(J)$ conţine două puncte la distanţă cel puţin 4, de unde concluzia **2p**

Problema 3. Punctul P este în interiorul triunghiului ABC, iar dreptele AP, BP, CP taie laturile BC, AC, AB în A_1, B_1, respectiv C_1. Se ştie că

$$s(PBA_1) + s(PCB_1) + s(PAC_1) = \frac{1}{2}s(ABC),$$

unde cu $s(XYZ)$ s-a notat aria triunghiului XYZ. Arătaţi că P se află pe o mediană a triunghiului ABC.

Soluţie. Avem $\dfrac{s(PBA_1)}{s(ABA_1)} = \dfrac{PA_1}{AA_1} = \dfrac{s(BPC)}{s(BAC)}$ **2p**

Notând $s(BPC) = s_a$ şi analoagele, rezultă $\dfrac{s(PBA_1)}{s_c + s(PBA_1)} = \dfrac{s_a}{s}$, unde $s = s(ABC)$, deci $s(PBA_1) = \dfrac{s_a s_c}{s - s_a} = \dfrac{s_a s_c}{s_b + s_c}$ **2p**

Ipoteza devine $\dfrac{s_a s_c}{s_b + s_c} + \dfrac{s_b s_a}{s_c + s_a} + \dfrac{s_c s_b}{s_a + s_b} = \dfrac{s_a + s_b + s_c}{2}$, ceea ce se reduce după calcule la $s(s_a - s_b)(s_b - s_c)(s_c - s_a) = 0$. Rezultă $s_a = s_b$ sau $s_a = s_c$ sau $s_b = s_c$, de unde concluzia **3p**

Problema 4. Fie $a, b, c, d \geq 0$ numere reale astfel încât $a + b + c + d = 1$. Arătaţi că

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-d)^2}{6} + \frac{(d-b)^2}{6}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 2.$$

Soluţie. Observăm că $(b-c)^2 \leq 2(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$, ceea ce rezultă din relaţia $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = b + c + 2\sqrt{bc} \leq 2b + 2c \leq 2$ **3p**

Astfel $a + \sum \frac{(b-c)^2}{6} \leq a + \frac{1}{3}\sum(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = 1 - \frac{1}{3}(\sum \sqrt{b})^2$ **1p**

Pentru a proba inegalitatea, este suficient ca $S + \sqrt{1 - S^2/3} \leq 2$, unde $S = \sum \sqrt{b}$ **1p**

Cum $S \leq 2$, aceasta este echivalent cu $1 - S^2/3 \leq 4 - 4S + S^2$ **1p**

Aceasta este totuna cu $(2S-3)^2 \geq 0$ – evident **1p**