Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a VIII-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ cu $a+b+c=3$ are loc inegalitatea:

$$2(ab+bc+ca)-3abc \geq a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+b\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Soluţie. Folosind eventual faptul că $\frac{b+c}{2} \leq \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$, se arată că:

$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \leq \frac{b^2+c^2}{b+c} = b+c-\frac{2bc}{b+c}$ şi analoagele **3p**

Atunci

$$a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+b\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq 2(ab+bc+ca)-2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

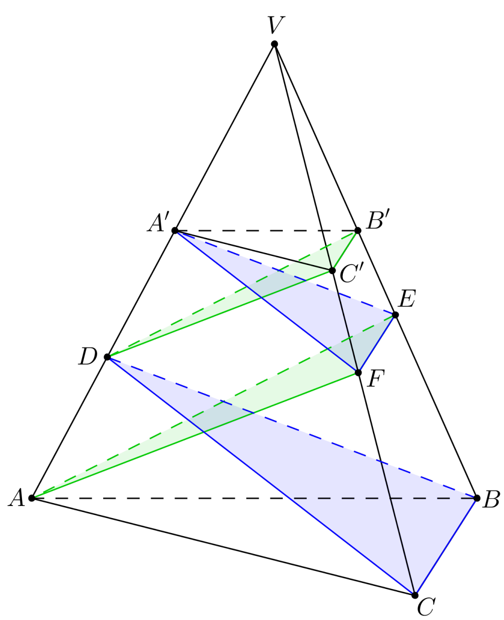
.... **2p**

Inegalitatea din enunţ se obţine observând că

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}$$

.... **2p**

Problema 2. Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară. Se consideră punctele $D \in (AA')$, $E \in (BB')$ şi $F \in (CC')$ astfel încât planele (AEF) şi $(DB'C')$ să fie paralele. Demonstraţi că planele $(A'EF)$ şi (DBC) sunt paralele.



Soluţie.

Notăm cu V vârful piramidei din care provine trunchiul.

Paralelismul planelor (AEF) şi $(DB'C')$ conduce la $EF \parallel B'C'$ şi $DB' \parallel AE$. **2p**

Cu teorema lui Thales, din $DB' \parallel AE$ şi $A'B' \parallel AB$, rezultă:

$$\frac{VD}{VA} = \frac{VB'}{VE}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB}.$$

Împărţind cele două egalităţi de mai sus, obţinem $\frac{VD}{VA'} = \frac{VB}{VE}$, de unde $A'E \parallel DB$ **4p**

Din $EF \parallel B'C' \parallel BC$ şi $A'E \parallel DB$ rezultă $(A'EF) \parallel (DBC)$. **1p**

Problema 3. Se notează cu $p\,(a)$ prima cifră a numărului natural a. Arătaţi că fiecare dintre mulţimile

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p\,(5^n) - p\,(2^n) > 0\} \quad \text{şi} \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid p\,(5^n) - p\,(2^n) < 0\}$$

conţine o infinitate de elemente.

Soluţie. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există $n_k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^{n_k} < 10^k < 2^{n_k+1}$, deoarece $10^k < 2^{4k}$ şi $n_k + 1$ este cel mai mic element din mulţimea $\{m \in \mathbb{N}^* | 10^k < 2^m\}$ .... **2 p**

Din $2^{n_k} < 10^k < 2^{n_k+1}$, înmulţind prima inegalitate cu 2, rezultă $10^k < 2^{n_k+1} < 2 \cdot 10^k$ **(1)**, deci $p(2^{n_k+1}) = 1$ .... **1 p**

Înmulţind inegalităţile **(1)** cu 5^{n_k+1}, obţinem $10^k \cdot 5^{n_k+1} < 10^{n_k+1} < 2 \cdot 10^k \cdot 5^{n_k+1}$, de unde împărţind prima inegalitate cu 10^k şi a doua cu $2 \cdot 10^k$, obţinem $5 \cdot 10^{n_k-k} < 5^{n_k+1} < 10^{n_k-k+1}$, deci $p(5^{n_k+1}) \geq 5 > p(2^{n_k+1})$................................ **1 p**

Din $2^{n_k} < 10^k < 2^{n_k+1}$, împărţind a doua inegalitate cu 2, rezultă rezultă $5 \cdot 10^{k-1} < 2^{n_k} < 10^k$ **(2)**, deci $p(2^{n_k}) \geq 5$................................ **1 p**

Înmulţind inegalităţile **(2)** cu 5^{n_k}, obţinem $10^{k-1} \cdot 5^{n_k+1} < 10^{n_k} < 10^k \cdot 5^{n_k}$, de unde împărţind prima inegalitate cu $5 \cdot 10^{k-1}$ şi a doua cu 10^k, obţinem $10^{n_k-k} < 5^{n_k} < 2 \cdot 10^{n_k-k}$, deci $p(5^{n_k}) = 1 < p(2^{n_k})$. **1 p**

Mulţimea $\{n_k | k \in \mathbb{N}^*\}$ are o infinitate de elemente deoarece $2^{n_k} < 10^k < 2^{n_k+1} < 2 \cdot 10^k < 5 \cdot 10^k < 2^{n_{k+1}}$, deci $n_k < n_{k+1}$. Cum $\{n_k | k \in \mathbb{N}^*\} \subset A$ şi $\{n_k+1 | k \in \mathbb{N}^*\} \subset B$, mulţimile A şi B au o infinitate de elemente................................ **1 p**

Problema 4. Într-un tetraedru regulat $ABCD$ se construiesc plane paralele la feţele tetraedrului, astfel încât fiecare muchie este împărţită în 6 segmente congruente. Aceste plane determină pe feţele, muchiile şi în interiorul tetraedrului o mulţime de 80 de puncte de intersecţie, notată V.

Determinaţi numărul maxim de elemente ale unei submulţimi W a mulţimii $V \cup \{A, B, C, D\}$ care are proprietatea:

oricare trei puncte distincte din W sunt necoliniare, iar planul determinat de acestea nu este paralel cu niciuna dintre feţele tetraedrului $ABCD$.

Soluţie. Putem presupune că lungimea înălţimii tetraedrului $ABCD$ este egală cu 6.

Fie k numărul maxim de elemente al mulţimii W şi $M_1, M_2, ..., M_k$ elementele lui W. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., k\}$ notăm cu $a_i, b_i,\ c_i$, respectiv d_i distanţele de la punctul M_i la planele $(BCD)\,,\ (ACD)\,,\ (ABD)$ şi respectiv (ABC); atunci $a_i, b_i, c_i, d_i \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$ .... **1 p**

Deoarece suma distanţelor de la un punct interior la feţele unui tetraedru regulat este egală cu înălţimea tetraedrului, rezultă că $a_i + b_i + c_i + d_i = 6$. .... **1 p**

Notând $T = (a_1 + a_2 + ... + a_k) + (b_1 + b_2 + ... + b_k) + (c_1 + c_2 + ... + c_k) + (d_1 + d_2 + ... + d_k)$, rezultă $T = 6k$.

Pentru k par, $k = 2s$, avem $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + ... + 2 \cdot (s-1) = s^2 - s$. Obţinem $T = 12s \geq 4s^2 - 4s$, deci $s \leq 4$ şi $k \leq 8$.

Pentru k impar, $k = 2s + 1$, avem $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + ... + 2 \cdot (s-1) + s = s^2$. Obţinem $T = 12s + 6 \geq 4s^2$, deci $s \leq 3$ şi $k \leq 7$. .... **3 p**

Rămâne să construim un exemplu de mulţime cu 8 elemente. Folosind scrierea (a_i, b_i, c_i, d_i) în loc de punctul M_i, un exemplu este mulţimea W formată din elementele $(0,1,2,3)\,,\ (1,0,2,3)\,,\ (0,1,3,2)\,,\ (1,0,3,2)\,,\ (2,3,0,1)\,,\ (2,3,1,0)\,,\ (3,2,1,0)$ şi $(3,2,0,1)$. .... **2 p**