Societatea de Ştiinţe
Matematice din România

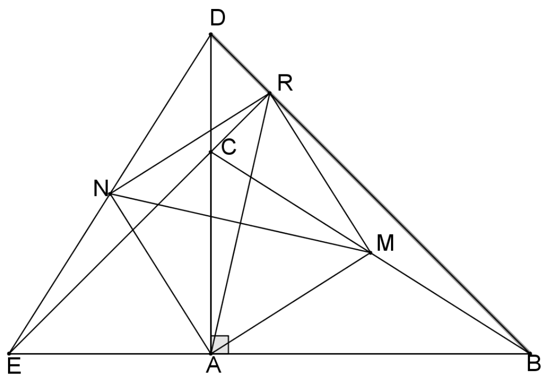
Ministerul Educaţiei şi
Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a VII-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AC < AB$. Pe semidreptele $(BA$ şi $(AC$ se consideră punctele E şi respectiv D astfel încât $A \in (BE)$, $C \in (AD)$, $AE = AC$ şi $AD = AB$. Se notează cu M şi N mijloacele segmentelor $[BC]$ şi $[DE]$, iar $\{R\} = EC \cap BD$. Arătaţi că $MN = RA$.

Soluţie



Din ipoteză se observă că $\triangle ACE$ şi $\triangle ABD$ sunt dreptunghice şi isoscele, de unde rezultă că şi $\triangle RBE$ este dreptunghic isoscel, $m(\widehat{RBE}) = m(\widehat{REB}) = 45°$. Din congruenţa triunghiurilor $\triangle ABC$ şi $\triangle ADE$ (CC) rezultă $BC = DE$. **2p**

În triunghiurile dreptunghice BRC, ABC, RDE, ADE. segmentele RM, AM, RN, AN sunt mediane din unghiul drept , deci $RM = \frac{1}{2}BC, AM = \frac{1}{2}BC, RN = \frac{1}{2}DE, AN = \frac{1}{2}DE$. **1p**

Astfel $RM = AM = RN = AN$, adică patrulaterul $AMRN$ este romb(*). În triunghiul dreptunghic ABC, AM mediană din unghiul drept ne conduce la $\triangle MAC$ isoscel, deci $m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{MCA})$. Analog, în $\triangle ADE$, $m(\widehat{NAD}) = m(\widehat{NDA})$. **2p**

De aici rezultă $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{NAC}) = m(\widehat{MCA}) + m(\widehat{NDA}) = m(\widehat{MCA}) + m(\widehat{ABC}) = 90°(**)$

Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă că patrulaterul $AMRN$ pătrat, de unde $MN = RA$. **2p**

Problema 2. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numerele $n+8, 2n+1, 4n+1$ să fie simultan cuburi perfecte.

Soluţie

Observăm că produsul $(n + 8)(4n + 1)(2n + 1)$ trebuie să fie cub perfect.

Avem $(n + 8)(4n + 1)(2n + 1) = 8n^3 + 70n^2 + 49n + 8$. Pentru $n \in \{1, 2, \cdots , 18\}$ numărul n+8 nu este cub pefect. **1p**

Pentru $n \geq 19$, $(2n + 2)^3 \leq 8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 < (2n + 6)^3, \forall n \in \mathbb{N}$. **2p**

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 2)^3$ obţinem $n = 0$, care este soluţie. **1p**

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 3)^3$, atunci $34n^2 - 5n - 19 = 0$, adică $n(34n - 5) = 19$, fără soluţie.

Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 4)^3$, atunci $22n^2 - 47n - 56 = 0$, adică $n(22n - 47) = 56$, fără soluţie.

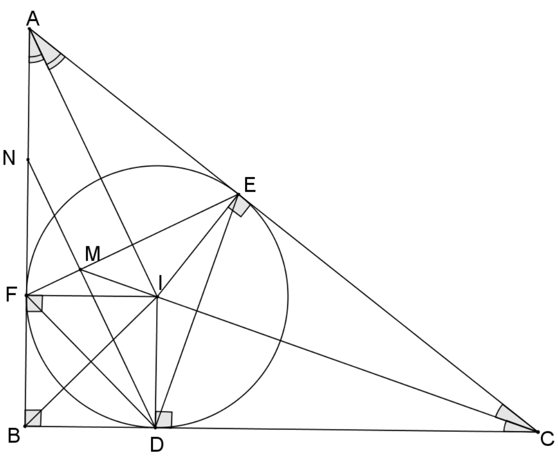
Dacă $8n^3 + 70n^2 + 49n + 8 = (2n + 5)^3$, atunci $10n^2 - 101n - 117 = 0$, adică $n(10n - 101) = 3 \cdot 29$, fără soluţie. **3p**

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC, $m(\hat{B}) = 90°$. Cercul înscris în triunghiul ABC are centrul I, iar punctele F, D şi E sunt punctele de contact ale acestui cerc cu laturile $[AB], [BC]$, respectiv $[AC]$. Dacă $CI \cap EF = \{M\}$ şi $DM \cap AB = \{N\}$, arătaţi că:

a) $AI = ND$;

b) $FM = \dfrac{EI \cdot EM}{EC}$.

Soluţie



a) Triunghiul AFE este isoscel, $AE = AF$, iar $AI \perp FE$, rezultă că $m(\widehat{AEF}) = 90° - m(\frac{\hat{A}}{2})$

Triunghiul CDE este isoscel, $CE = CD$, iar $CI \perp DE$, rezultă că $m(\widehat{DEC}) = 90° - m(\frac{\hat{C}}{2})$

Deducem că $m(\widehat{MED}) = 180° - m(\widehat{AEF}) - m(\widehat{DEC}) = 180° - (180° - \frac{m(\hat{A})+m(\hat{C})}{2}) = 45°$.(*) **1p**

Cum $\triangle MDC \equiv \triangle MEC$ (L.U.L.), rezultă $MD = ME$(**) . Din (*) şi (**), deducem că $\triangle MED$ este dreptunghic isoscel. Înseamnă că $DN \perp EF$, şi, cum $AI \perp EF$, rezultă $DN \parallel AI$ (***). În plus, $AN \parallel ID$(****). Din (***) şi (****) rezultă că patrulaterul $ANDI$ este paralelogram, deci $AI = ND$. **3p**

b) $m(\widehat{EFD}) = 180° - m(\widehat{AFE}) - m(\widehat{BFD}) = \frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})}{2} = 90° - \frac{m(\hat{C})}{2} = m(\widehat{DIC})$

Deducem că $\triangle FMD \sim \triangle IDC$(U.U.).

Prin urmare $\frac{FM}{ID} = \frac{MD}{DC} \Leftrightarrow FM = \frac{ID \cdot MD}{DC} = \frac{EI \cdot EM}{EC}$ **3p**

Problema 4. Determinaţi numerele prime distincte p, q, r şi s care verifică relaţia

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs}.$$

Soluţie

Vom considera $p < q < r < s$.

Presupunând că $p \geq 3$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11} = \frac{886}{1155}$, deci $1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}) \geq 1-\frac{886}{1155} > 0,2$, dar $\frac{1}{pqrs} < \frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot11} < 0,006$. În concluzie $p = 2$. **2p**

Relaţia din enunţ devine $\frac{1}{2} - (\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{2qrs}$.

Presupunând $q \geq 5$ rezultă $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} < 0,44$, de unde $\frac{1}{2} - (\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}) > 0,06$. Dar $\frac{1}{2qrs} < \frac{1}{2\cdot5\cdot7\cdot11} < 0,001$. Deducem $q = 3$. **2p**

Relaţia din enunţ devine $\frac{1}{6} - (\frac{1}{r} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{6rs}$ echivalentă cu $rs - 6r - 6s - 1 = 0$, de unde obţinem $(r-6)(s-6) = 37$. **2p**

Deducem $r = 7, s = 43$ **1p**