Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a V-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Patru familii prietene au fiecare câte doi copii şi toţi copiii s-au născut după anul 1989. Anul naşterii mezinilor este acelaşi, având suma cifrelor egală cu produsul cifrelor nenule. Diferenţa de vârstă dintre fraţii aceleiaşi familii este un număr natural de ani exprimat printr-un pătrat perfect nenul. Aflaţi anul naşterii fraţilor cei mari din fiecare familie, ştiind că aceştia nu pot avea vârste egale.

Soluţie. Arătăm că anul naşterii mezinilor nu poate fi de forma $\overline{199a}$. Presupunând că anul naşterii are forma $\overline{199a}$ trebuie ca $1+9+9+a=1\cdot 9\cdot 9\cdot a$, adică $19+a=81\cdot a$; relaţie imposibilă în condiţiile în care a este cifră. Prin urmare anul naşterii mezinilor are una dintre formele $\overline{200a}$ sau $\overline{201a}$

Dacă are forma $\overline{200a}$, din condiţia $2+a=2\cdot a$ deducem $a=2$, iar dacă are forma $\overline{201a}$, din condiţia $2+1+a=2\cdot 1\cdot a$, deducem $a=3$ **2p**

Cazurile 1990, 2000 şi 2010 nu convin. **1p**

Diferenţa de vârstă dintre fraţi este aceeaşi cu diferenţa dintre anii naşterii fiecăruia Pentru 2002 aceste diferenţe sunt: $2002-x$, $2002-y$, $2002-z$, $2002-t$, în care $x,\ y,\ z,\ t$ sunt anii de naştere ai fraţilor mai mari.

Diferenţele trebuie să fie egale cu 1, 4, 9, respectiv 16. Presupunând $x\geq 16$ obţinem $2002-x\leq 1986$. Dar toţi copiii sunt născuţi după anul 1989, prin urmare acest caz nu este posibil **2p**

Pentru 2013 aceste diferenţe sunt: $2013-x$, $2013-y$, $2013-z$, $2013-t$, în care $x,\ y,\ z,\ t$ sunt anii de naştere ai fraţilor mai mari.

Diferenţele trebuie să fie egale cu 1, 4, 9, 16. Presupunând $x\geq 25$ obţinem $2013-x\leq 1988$, dar toţi copiii sunt născuţ după anul 1989.

Aşadar putem avea $2013-x=1$, $2013-y=4$, $2013-z=9$, $2013-t=16$, de unde $x=2012$, $y=2009$, $z=2004$, $t=1997$ **2p**

Problema 2. Determinaţi cel mai mic număr natural care are exact 2015 divizori.

Soluţie. Dacă un număr natural se descompune în $p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, unde $p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n$ sunt numere prime diferite, atunci numărul divizorilor săi naturali este egal cu $(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)$.

Cum $2015=1\cdot 2015=5\cdot 403=13\cdot 155=31\cdot 65=5\cdot 13\cdot 31$ rezultă că numărul căutat are una dintre formele $a=2^{2014}$, $b=2^{402}\cdot 3^4$, $c=2^{154}\cdot 3^{12}$, $d=2^{64}\cdot 3^{30}$ sau $e=2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$, deoarece pentru a obţine numere cât mai mici trebuie ca exponenţii cei mai mari să corespundă celor mai mici numere prime **4p**

Avem $a>e$ deoarece din $2^{2014}>2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$ obţinem $2^{1984}>3^{12}\cdot 5^4$ care este evident adevărată.

Avem $b>e$ deoarece din $2^{402}\cdot 3^4>2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$ obţinem $2^{372}>3^8\cdot 5^4$ care este evident adevărată.

Avem $c>e$ deoarece din $2^{154}\cdot 3^{12}>2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$ obţinem $2^{124}>5^4$ care este evident adevărată.

Avem $d>e$ deoarece din $2^{64}\cdot 3^{30}>2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$ obţinem $2^{34}\cdot 3^{18}>5^4$ care este evident adevărată **2p**

Prin urmare, cel mai mic număr natural cu exact 2015 divizori este $2^{30} \cdot 3^{12} \cdot 5^4$ **1p**

Problema 3. Se spune că numărul natural $n \geq 2$ este *norocos* dacă numărul n^2 se poate scrie ca suma a n numere naturale nenule consecutive. Să se arate că:

a) numărul 7 este norocos;

b) numărul 10 nu este norocos;

c) produsul oricăror două numere norocoase este un număr norocos.

Soluţie. a) Trebuie găsite 7 numere consecutive, $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6$ astfel încât $7^2 = a+a+1+a+2+a+3+a+4+a+5+a+6$. Obţinem $49 = 7a+21$, de unde $a = 4$. Aşadar $7^2 = 4+5+6+7+8+9+10$, deci 7 este norocos **1p**

b) Trebuie găsite 10 numere consecutive, $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6,\ a+7,\ a+8,\ a+9$ astfel încât $10^2 = a+a+1+a+2+a+3+a+4+a+5+a+6+a+7+a+8+a+9$. Obţinem $100 = 10a+45$, de unde $10a = 55$, care nu are soluţie număr natural. Prin urmare 10 nu este norocos. **1p**

c) Vom arăta că un număr este norocos dacă şi numai dacă este număr impar.

Demonstrăm că orice număr norocos este număr impar. Fie m un număr norocos, atunci $m^2 = (a+1)+(a+2)+(a+3)+...+(a+m)$, unde a este număr natural. Obţinem $m^2 = m \cdot a+(1+2+3+...+m)$ sau $m^2 = m \cdot a + \frac{m \cdot (m+1)}{2}$. Din ultima relaţie rezultă $2 \cdot m^2 = 2 \cdot m \cdot a + m^2 + m$ sau $2 \cdot m = 2 \cdot a + m + 1$, de unde $m = 2 \cdot a + 1$, adică m este număr impar.. **2p**

Demonstrăm că orice număr impar este norocos. Trebuie arătat că există un x număr natural astfel încât $m^2 = (x+1)+(x+2)+(x+3)+...+(x+m)$, pentru orice $m = 2 \cdot k + 1$, k număr natural. Ultima relaţie conduce la $m = 2 \cdot x + 1$. Înlocuind m cu $2 \cdot k + 1$ obţinem $2 \cdot k + 1 = 2 \cdot x + 1$, de unde $x = k$. Deducem aşadar, că orice număr impar este norocos. **2p**

Revenim la problemă. Dacă p şi q sunt numere norocoase, atunci p şi q sunt numere impare. Cum produsul a două numere impare este un număr impar obţinem $p \cdot q$ este număr impar, prin urmare este norocos. **1p**

Problema 4. Pe tablă sunt scrise, unul după altul, opt numere egale cu 0. Numim *operaţie* modificarea a patru dintre cele opt numere, astfel: două numere se măresc cu 3, un număr se măreşte cu 2, iar cel de al patrulea număr se măreşte cu 1.

a) Care este numărul minim de operaţii pe care trebuie să le efectuăm pentru a obţine pe tablă opt numere naturale consecutive.

b) Este posibil ca, după un număr de operaţii, toate numerele scrise pe tablă să fie egale cu 2015?

c) Este posibil ca, în urma unei succesiuni de operaţii, produsul numerelor de pe tablă să fie 2145?

Soluţie.

a) La fiecare operaţie suma numerelor se măreşte cu 9. Asta înseamnă că după k operaţii suma numerelor aflate pe tablă va fi $9 \cdot k$. Suma celor mai mici opt numere naturale consecutive este $0+1+2+...+7 = 28$, care nu se divide cu 9, iar $1+2+3+...+8 = 36$. Cum $9 \cdot 4 = 36$, deducem că numărul minim de operaţii pentru obţinerea a opt numere consecutive este 4. Iată mai jos o astfel de posibilitate:

Iniţial	0	0	0	0	0	0	0	0
Operaţia 1	1	2					3	3
Operaţia 2			2	1			3	3
Operaţia 3					3	3	1	2
Operaţia 3			1	3	2	3		
Total	1	2	3	4	5	6	7	8

.... **2p**

b) Aşa cum am observat la punctul a), după k operaţii, suma celor 8 numere este $9 \cdot k$. Presupunând că după un număr de operaţii toate cele 8 numere sunt egale cu 2015, atunci suma lor este $8 \cdot 2015$. Cum $8 \cdot 2015$ nu se divide cu 9, deducem că nu este posibil ca după un număr de operaţii toate numerele scrise pe tablă să fie egale cu 2015 .... **2p**

c) Avem $2145 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. Dacă numerele de pe tablă sunt 3, 5, 11, 13, 1, 1, ,1, 1, atunci $3 + 5 + 11 + 13 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36$, ceea ce înseamnă că sunt necesare 4 operaţii pentru a ajunge la aceste opt numere. Cum, din 4 operaţii nu putem obţine 13 deducem că această variantă nu este posibilă.

Pe tablă nu putem avea 6 sau mai mult numere egale cu 1, deoarece la orice alegere trei dintre numere sunt mai mari decât 1. Dacă pe tablă sunt 5 numere egale cu 1, înseamnă că s-au efectuat 5 operaţii. Rezultă că $a + b + c + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 45$, unde a este produsul a două dintre numerele 3, 5, 11 sau 13, iar b şi c sunt cele două numere rămase. În niciuna dintre situaţii suma $a + b + c$ nu este 40. Prin urmare nici această variantă nu este posibilă. În concluzie nu este posibil ca în urma unei succesiuni de operaţii produsul numerelor de pe tablă să fie 2145 .... **3p**