Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Bucureşti, 7 aprilie 2015

CLASA a VI-a - Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Determinaţi numerele naturale care au proprietatea că admit exact 8 divizori pozitivi, dintre care trei sunt numere prime de forma a, $\overline{bc}$ şi $\overline{cb}$ şi $a+\overline{bc}+\overline{cb}$ este pătrat perfect, unde a, b şi c sunt cifre cu $b<c$.

Soluţie. Notăm cu x un număr cu proprietăţile din enunţ. x are exact 8 divizori, a, $\overline{bc}$ şi $\overline{cb}$ trei divizori numere prime, rezultă că x se divide cu $y=a\cdot\overline{bc}\cdot\overline{cb}$, iar y are exact 8 divizori, deci $x=y$ **3 p**

Numerele $\overline{bc}$ şi $\overline{cb}$ sunt numere prime distincte, deci $\overline{bc}\in\{13,17,37,79\}$ .... **1 p**

Din condiţia că $a+\overline{bc}+\overline{cb}$ este pătrat perfect şi a prim, rezultă $a=5$, $\overline{bc}=13$ şi $\overline{cb}=31$, deci $x=2015$ .... **3 p**

Problema 2. a) Determinaţi numerele naturale a pentru care

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}<\frac{1}{3}.$$

b) Demonstraţi că pentru orice număr natural $p\geq 2$ există p numere naturale consecutive $a_1, a_2, \ldots, a_p$ astfel încât

$$\frac{1}{p+1}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_p}<\frac{1}{p}.$$

Soluţie. a) Dacă $S=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}$, atunci $\frac{3}{a+3}<S<\frac{3}{a+1}$ şi cum $\frac{1}{4}<S<\frac{1}{3}$, rezultă $\frac{1}{4}<\frac{3}{a+1}$ şi $\frac{3}{a+3}<\frac{1}{3}$.

Rezultă că $6<a<11$, deci $a\in\{7,8,9,10\}$ .... **2 p**

Pentru $a=7$ rezultă $S=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{121}{360}>\frac{1}{3}$.

Pentru $a=8$ rezultă $S=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$, iar $\frac{1}{4}<\frac{3}{11}<S<\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Pentru $a=9$ rezultă $S=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$, iar $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}<S<\frac{3}{10}<\frac{1}{3}$.

Pentru $a=10$ rezultă $S=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}<\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ şi $S=\frac{1}{12}+\frac{24}{143}>\frac{1}{12}+\frac{24}{144}=\frac{1}{4}$.

Soluţiile sunt $a=8$,$a=9$ şi $a=10$ .... **2 p**

b) Pentru $a_1=p^2+1$, $a_2=p^2+2$, ..., $a_p=p^2+p$, avem $S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_p}=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+2}+\cdots+\frac{1}{p^2+p}$ şi cum $\frac{1}{p^2+1}>\frac{1}{p^2+2}>\cdots>\frac{1}{p^2+p}$, rezultă că $\frac{p}{p^2+p}<S<\frac{p}{p^2+1}$.

Deoarece $\dfrac{p}{p^2+1} < \dfrac{p}{p^2}$, rezultă $\dfrac{1}{p+1} < S < \dfrac{1}{p}$ .... **3 p**

Problema 3. Arătaţi că dacă x, y şi n sunt numere naturale astfel încât

$$n = \frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3},$$

atunci

a) $n = y^2 - x^2$;

b) n este multiplu de 20.

Soluţie. a) Din enunţ rezultă $x^2 = 2n+1$ şi $y^2 = 3n+1$, de unde se obţine că $y^2 - x^2 = n$. **1 p**

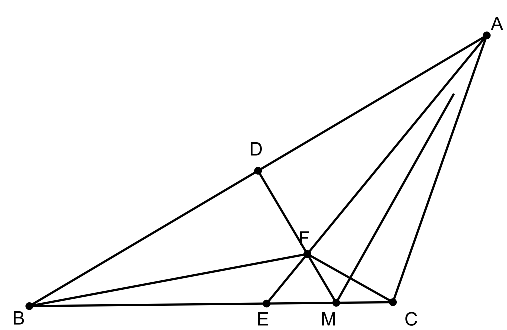
b) Cum $x^2 = 2n+1$, x este număr impar, deci $x^2 = M_4 + 1$, de unde se obţine că n este par. Atunci $y^2 = 3n+1$ este număr impar, deci y este impar. .... **2 p**

Întrucât x şi y sunt impare, rezultă $u(x^2), u(y^2) \in \{1,5,9\}$. Din $x^2 = 2n+1$ rezultă $u(n) \in \{0,2,4,5,7,9\}$, iar din $y^2 = 3n+1$ rezultă $u(n) \in \{0,6,8\}$. Ca urmare, $u(n) = 0$, de unde $5|n$. .**2 p**

Deoarece x şi y sunt impare, rezultă că $x^2 = M_4 + 1$ şi $y^2 = M_4 + 1$, deci $n = y^2 - x^2 = M_4$. Din $5|n$, $4|n$ şi $(4,5) = 1$ rezultă că $20|n$ .... **2 p**

Problema 4. Se consideră un triunghi ABC în care $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{4}{3} \cdot m(\sphericalangle ABC) < 90°$. Fie $(AE$ bisectoarea unghiului BAC, cu $E \in (BC)$ şi punctul $F \in (AE$ astfel încât $m(\sphericalangle ABF) = \dfrac{1}{2} m(\sphericalangle BAC)$ şi $[AF] \equiv [AC]$. Determinaţi măsura unghiului BCF.

Soluţie



Notăm $m(\sphericalangle BAC) = 4x$. Rezultă că $m(\sphericalangle ABC) = 3x$, $m(\sphericalangle BAF) = m(\sphericalangle CAF) = m(\sphericalangle ABF) = 2x$ şi $m(\sphericalangle CBF) = x$ .... **1 p**

Construim mediatoarea FD a laturii $[AB]$ în triunghiul isoscel ABF, cu $D \in (AB)$ şi notăm $\{M\} = FD \cap BC$. Rezultă că $[AM] \equiv [BM]$, deci $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle ABM) = 3x$, de unde $m(\sphericalangle FAM) = m(\sphericalangle MAC) = x$, deci AM este bisectoare în triunghiul isoscel CAF. .... **2 p**

AM este mediatoarea segmentului $[FC]$, rezultă că $m(\sphericalangle MCF) = m(\sphericalangle MFC)$............. **1 p**

Cum $m(\sphericalangle AFC) = 90° - x$ şi $m(\sphericalangle AFD) = 90° - 2x$, rezultă că $m(\sphericalangle CFM) = 180° - (90° - x) - (90° - 2x) = 3x$ .... **1 p**

Pe de altă parte $m(\sphericalangle FCM) = 180° - m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle BAC) - m(\sphericalangle ACF) = 180° - 7x - (90° - x) = 90° - 6x$.. **1 p**

Deci $3x = 90° - 6x \Rightarrow x = 10°$, de unde $m(\sphericalangle BCF) = 30°$ .... **1 p**