CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/REZERVATE ÎN UNITĂŢILE DE ÎNVĂŢĂMÂNT PREUNIVERSITAR
15 iulie 2015

Probă scrisă
Matematică

Model

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2+2(m+2)x+m^2+4m+3=0$, unde m este un număr real.

5p **a)** Pentru $m=-3$, calculați x_1 și x_2.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, știind că $|x_1+x_2+2x_1x_2|<1$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care cel puţin unul dintre numerele x_1 şi x_2 este întreg.

2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și punctele M, N și P mijloacele arcelor mici $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ și, respectiv, $\overset{\frown}{AB}$ ale cercului circumscris triunghiului ABC. Se notează cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

5p **a)** Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente în I.

5p **b)** Arătaţi că triunghiul BIM este isoscel.

5p **c)** Demonstraţi că punctul I este ortocentrul triunghiului MNP.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ și matricea $A=\begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule. Se notează cu x_1, x_2 și x_3 soluțiile ecuației $x^3-1=0$.

5p **a)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Arătaţi că $\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) \end{pmatrix} = A\cdot B$, unde $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det A = f(x_1)f(x_2)f(x_3)$.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-2\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei g.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\left(2n-\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx\right)\right)^n$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvenţă face parte din programa şcolară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore):

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. ***Recunoaşterea*** *unor corespondenţe care sunt şiruri, progresii aritmetice sau geometrice* *2.* ***Calcularea*** *valorilor unor şiruri care modelează situaţii practice în scopul caracterizării acestora* *3.* ***Alegerea*** *şi* ***utilizarea*** *unor modalităţi adecvate de calculare a elementelor unui şir* *4.* ***Interpretarea*** *grafică a unor relaţii provenite din probleme practice* *5.* ***Analizarea*** *datelor în vederea aplicării unor formule de recurenţă sau a raţionamentului de tip inductiv în rezolvarea problemelor* *6.* ***Analizarea*** *şi* ***adaptarea*** *scrierii termenilor unui şir în funcţie de context*	***Şiruri*** • *Modalităţi de a descrie un şir; şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii* • *Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru* $n \geq 3$

(Programa şcolară de matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

Elaboraţi şase itemi de tipuri diferite: un item de tip *alegere multiplă*, un item de tip *răspuns scurt*, un item de tip *pereche*, un item de *completare*, un item de tip *întrebare structurată* şi un item de tip *rezolvare de probleme*, prin care să evaluaţi trei sau mai multe dintre competenţele precizate în secvenţa dată.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- formatul fiecărui item elaborat în vederea evaluării competenţei specifice alese;
- răspunsul aşteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaboraţi;
- conţinutul ştiinţific al informaţiei de specialitate.

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR DECLARATE VACANTE/REZERVATE ÎN UNITĂŢILE DE ÎNVĂŢĂMÂNT PREUNIVERSITAR
15 iulie 2015
Probă scrisă
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerinţelor, în limita punctajului maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)** $2x^2-2x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=1$	**2p**
	b) $x_1+x_2=-m-2$, $x_1x_2=\dfrac{m^2+4m+3}{2}$	**2p**
	$-1<m^2+3m+1<1 \Leftrightarrow m\in(-3,-2)\cup(-1,0)$	**3p**
	c) ${2x_1}^2+2(m+2)x_1+m^2+4m+3=0$, deci ecuaţia $m^2+(2x_1+4)m+{2x_1}^2+4x_1+3=0$ are soluții reale	**2p**
	$\Delta=4\left(1-x_1^2\right)\geq 0$ și $x_1\in\mathbb{Z}$ implică $m=-3$ sau $m=-1$	**3p**
2.	**a)** $(AM$ bisectoarea unghiului BAC, $(BN$ bisectoarea unghiului ABC și	**2p**
	$(CP$ bisectoarea unghiului ACB, deci AM, BN și CP sunt concurente în I	**3p**
	b) $m(\sphericalangle BIM)=\frac{1}{2}\left(m\left(\widehat{AN}\right)+m\left(\widehat{BM}\right)\right)=m(\sphericalangle ABN)+m(\sphericalangle BAM)=\frac{1}{2}m(\sphericalangle B)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$	**2p**
	$m(\sphericalangle IBM)=m(\sphericalangle IBC)+m(\sphericalangle CBM)=\frac{1}{2}m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle CAM)=\frac{1}{2}m(\sphericalangle B)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$, deci $\sphericalangle BIM\equiv\sphericalangle IBM$	**3p**
	c) $m(\sphericalangle(AM,NP))=\dfrac{m\left(\widehat{PA}\right)+m\left(\widehat{MN}\right)}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(m\left(\widehat{AB}\right)+m\left(\widehat{BC}\right)+m\left(\widehat{CA}\right)\right)}{2}=90^\circ\Rightarrow AM\perp NP$	**2p**
	Analog $CP\perp MN\Rightarrow I$ este ortocentrul ΔMNP	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=0$	**3p**
	b) $\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3)\\ x_1f(x_1) & x_2f(x_2) & x_3f(x_3)\\ x_1^2f(x_1) & x_2^2f(x_2) & x_3^2f(x_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1^2+bx_1+c & ax_2^2+bx_2+c & ax_3^2+bx_3+c\\ a+bx_1^2+cx_1 & a+bx_2^2+cx_2 & a+bx_3^2+cx_3\\ ax_1+b+cx_1^2 & ax_2+b+cx_2^2 & ax_3+b+cx_3^2\end{pmatrix}$, deoarece $x_1^3=x_2^3=x_3^3=1$	**2p**
	$A\cdot B=\begin{pmatrix} c & b & a\\ a & c & b\\ b & a & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} c+bx_1+ax_1^2 & c+bx_2+ax_2^2 & c+bx_3+ax_3^2\\ a+cx_1+bx_1^2 & a+cx_2+bx_2^2 & a+cx_3+bx_3^2\\ b+ax_1+cx_1^2 & b+ax_2+cx_2^2 & b+ax_3+cx_3^2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3)\\ x_1f(x_1) & x_2f(x_2) & x_3f(x_3)\\ x_1^2f(x_1) & x_2^2f(x_2) & x_3^2f(x_3)\end{pmatrix}=A\cdot B$	**3p**

	c) $\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) \end{vmatrix}=f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdot\det B$	**2p**
	$\det A\cdot\det B=f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdot\det B\Rightarrow\det A=f(x_1)f(x_2)f(x_3)$, deoarece $\det B=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\neq 0$	**3p**
2.	**a)** $g'(x)=2-\frac{2}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-2}{x^2+1}=$	**3p**
	$=f(x)$ pentru orice număr real x, deci funcţia g este o primitivă a funcţiei f	**2p**
	b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-2\operatorname{arctg}x}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\operatorname{arctg}x\right)=-\pi$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=2x-\pi$ este asimptotă oblică $+\infty$ la graficul funcției g	**2p**
	c) $\frac{1}{\pi}\left(2n-\int_0^n\frac{2x^2}{x^2+1}dx\right)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}n$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}n\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2\operatorname{arctg}n-\pi}{\pi}\right)^n=e^{-\frac{2}{\pi}}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

- câte 1 punct pentru corectitudinea formatului fiecărui item elaborat	$1\text{p}\times 6$ itemi $=$ **6 p**
- câte 2 puncte pentru corectitudinea răspunsului aşteptat (barem de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaboraţi	$2\text{p}\times 6$ itemi $=$ **12 p**
- câte 2 puncte pentru corectitudinea ştiinţifică a informaţiei de specialitate pentru fiecare item elaborat	$2\text{p}\times 6$ itemi $=$ **12 p**