Concursul Doljean de Matematică

14.03.2015

Clasa a IX-a

1. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, au proprietatea $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + (a+b+c)^2 \leq 12$, arătați că:

$$ab + bc + ca + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 6.$$

Precizaţi când au loc egalităţile.

DAN SECLĂMAN

2. a) Să se demonstreze identitatea *Botez - Catalan*:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

b) Fie p și q numere naturale astfel încât $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$.

Demonstraţi că 1979 divide pe p.

* * *

3. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*. Dacă $\frac{c}{2a}\overrightarrow{IA} + \frac{c}{2b}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, atunci triunghiul *ABC* este dreptunghic isoscel.

* * *

4. Se consideră triunghiul *ABC* și punctele $M \in (AB), N \in (AC)$, astfel încât $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = k$. Să se arate că dreapta *MN* trece prin centrul de greutate al triunghiului *ABC* dacă și numai dacă $k = 1$.

* * *

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

Concursul Doljean de Matematică

14.03.2015

Clasa a X-a

1. a) Demonstrați că un număr complex este real dacă și numai dacă coincide cu conjugatul său.

b) Dacă $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ astfel încât $\frac{z}{3} + \frac{3}{z} \in \mathbf{R}$, calculați $|z|$.

R.M.C. Nr.1/2014-2015

2. Se consideră $x = 3 \cdot 4^{\frac{2015}{n} + \frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{\frac{2015}{n}} + 1$, cu $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, iar cu y se notează numitorul fracției care se obține după raționalizarea fracției $\frac{1}{x}$. Arătați că y este divizibil cu 31.

IONEL PREJBEANU

3. Să se rezolve în **R** ecuaţia:

$$(\text{arctg } x)^3 + \left(\text{arctg } \frac{1}{x}\right)^3 = \frac{\pi^3}{24}.$$

* * *

4. Dacă $x, y, z \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, demonstrați că:

$$\log_{3xy}\left(2x + \frac{y}{x}\right) + \log_{3yz}\left(2y + \frac{z}{y}\right) + \log_{3zx}\left(2z + \frac{x}{z}\right) \geq 1 + \frac{6}{\log_3(27(xyz)^2)}.$$

Precizaţi cazul de egalitate.

DAN SECLĂMAN

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu).

Timp de lucru: 3 ore

Concursul Doljean de Matematică

14.03.2015

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$ și $\det(A + A^t)$.
b) Determinați matricea B de ordinul 3 astfel încât $A = B + I_3$ și apoi determinați A^n pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

R.M.C. Nr.1/2014-2015

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ cu $AB = BA$ și $\det A = \det B = 0$. Să se arate că $\det(A^3 + B^3)$ este sumă a două cuburi de numere întregi.

CRISTIAN MOANȚĂ

3. a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ dacă $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{2}$.

b) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că are limite laterale finite în orice punct din **R**. Demonstraţi că funcţia transformă mulţimi mărginite în mulţimi mărginite.

* * *

4. Calculați: $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \left(7 + 3\sqrt{5}\right)^n \right\}^{-\frac{2015}{\left(7-3\sqrt{5}\right)^n}}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x .

ANI DRĂGHICI

Notă
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.
Timp de lucru: 3 ore

Concursul Doljean de Matematică
14.03.2015
Clasa a XII-a

1. a) Determinați părțile stabile finite ale lui **Z** în raport cu operația de înmulțire.
b) Fie mulțimea:

$$M = \left\{E \middle| E = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+4}{2^3}\right] + \left[\frac{n+8}{2^4}\right] + \cdots, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Să se determine $n \in \mathbf{N}$ pentru care M este parte stabilă finită în raport cu înmulțirea.

CRISTIAN MOANȚĂ

2. Pentru $x \in \mathbf{R}$ fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2014^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $G = \{A(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

a) Arătați că: $A(x) \cdot A(y) = A(x+y), (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.

b) Demonstrați că G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Calculați $(A(x))^n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

R.M.C. Nr.1/2014 - 2015

3. Fie $a > 0$, fixat și $f: \mathbf{R} \to [-a, a]$ o funcție integrabilă . Demonstrați că pentru orice $p > 0$ există inegalitatea:

$$\sqrt{2p+1} \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - f^2(x)}\, dx + p \cdot \int_{-a}^{a} f(x) dx \le 2(p+1)a^2 .$$

Precizați cazul de egalitate.

DAN SECLĂMAN

4. Fie $f:[0,1] \to [0,1]$ o funcție continuă. Se definește șirul $(x_n)_{n \ge 0}$ unde $x_0 = a \in (0,1)$ și

$$x_{n+1} = \frac{1}{2015} \cdot \left(2014 \cdot x_n + \int_0^{x_n} f(t)\, dt\right)$$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Să se studieze convergența șirului, iar dacă acest șir este convergent să i se calculeze limita.

CRISTIAN MOANȚĂ

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.
Timp de lucru: 3 ore