Probleme de antrenament - Setul 1

Problema 1

a) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 - (m-2)x - 2m + 1 = 0$ să aibă soluţii de semne contrare.

b) Să se afle $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $4^t - (m-2)2^t - 2m + 1 = 0$ să aibă soluţii de semne contrare.

Problema 2

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^n pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

b) Să se afle toţi $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât suma elementelor matricei A^n sa fie nulă.

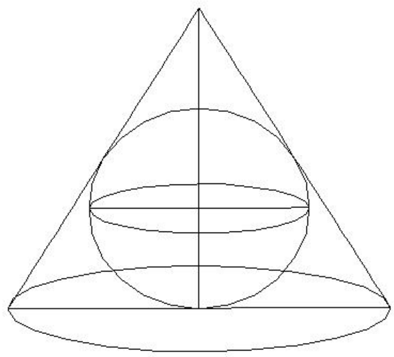
Problema 3

Să se determine imaginea funcţiei

$$f : \{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x| \geq 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\mathrm{arctg}|x| + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

Problema 4

Să se determine raza conului circular drept de volum minim circumscris unei sfere de rază r.



Problema 5

Care dintre numerele e^π sau π^e este mai mare?

Problema 6

Fie ecuaţia $y + \sin y - t^2 = 0$, necunoscuta fiind y.

a) Să se demonstreze că pentru orice $t \in \mathbb{R}$, ecuaţia are o unică soluţie.

b) Să se demonstreze că pentru orice $t \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$, ecuaţia are o unică soluţie $y \in (-\pi, \pi)$.

c) Să se studieze extremele funcţiei $y : (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \longrightarrow (-\pi, \pi)$, care verifică relaţia $y(t) + \sin y(t) - t^2 = 0$, pentru orice $t \in (-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Probleme de antrenament - Setul 2

Problema 1

a) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2

Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^2 = A$.

Problema 3

a) Arătaţi că $f(n) = g(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}, \qquad g(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1}.$$

b) Demonstraţi că $(n+1)\cdot(n+2)\cdot ... \cdot(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4

Elevii A şi B participă la următorul joc:

"Se dă ecuaţia $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Mai întâi A dă o valoare număr întreg unuia dintre coeficienţi. Apoi B dă o valoare număr întreg unuia dintre coeficienţii necunoscuţi. In final A alege valoarea ultimului coeficient încă necunoscut."

Demonstraţi că A poate face ca toate cele trei soluţii ale ecuaţiei obţinute să fie numere întregi.

Problema 5

a) Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, să se calculeze $s_n = t^2 + t^3 + ... + t^n$ şi $S_n = 2t + 3t^2 + ... + nt^{n-1}$, pentru $t \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, pentru $t \in (-1, 1)$.

c) Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{\ln(x^2)}{(\ln x)^2} + \dfrac{\ln(x^3)}{(\ln x)^3} + \dfrac{\ln(x^4)}{(\ln x)^4} + ... = 8$, ştiind că $x > \mathrm{e}$.

Problema 6

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+a^x)}{\ln(1+b^x)}$, pentru $a, b \in (0,\infty)\backslash\{1\}$.

Problema 1.

a) Fiind date punctele A, B şi dreapta d ca în figura 1 sa se determine un punct P pe dreapta d astfel încât distanţa $|AP| + |BP|$ să fie minimă.

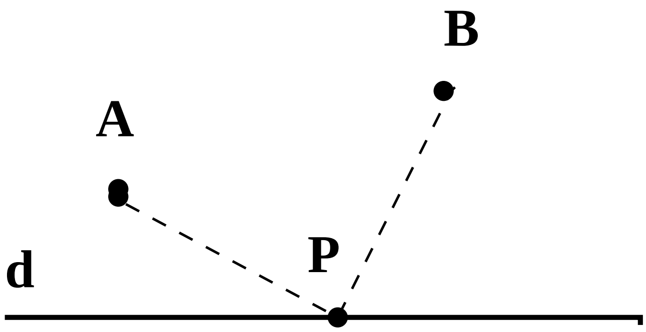


Figure 1:

b) Fiind date punctele A, B şi dreptele d şi e ca în figura 1 sa se determine punctele $P \in d$ şi $q \in e$ astfel încât distanţa $|AP|+|PQ|+|QB|$ să fie minimă.

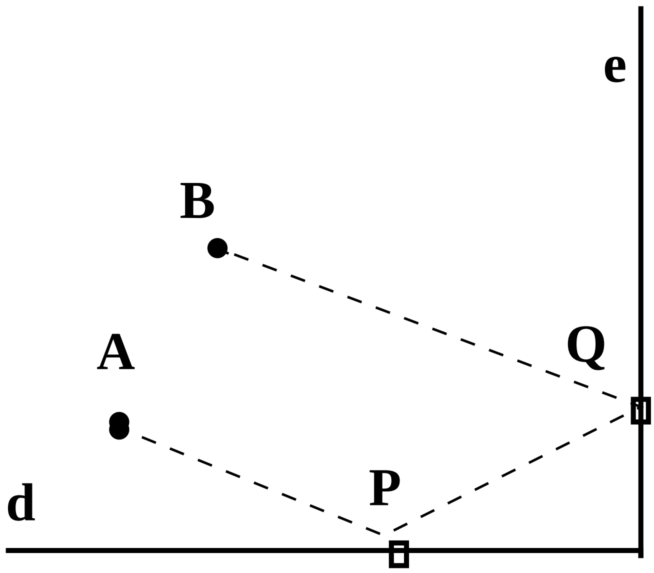


Figure 2:

c) Se consideră tetraedrul $VABC$. Să se determine un punct $M \in VB$ astfel încât distanţa $|AM| + |MC|$ să fie minimă.

Problema 2.

Să se se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + 2mx + 1 = 0$$

să satisfacă relaţiile:

a) $x_1, x_2 \leq 2$.

b) $x_1, x_2 \geq 1$.

c) $0 < x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 2$.

Problema 3.

Să se determine termenul general al şirurilor determinate de relaţiile de recurenţă:

a) $a_{n+1} = 3a_n + \frac{1}{2}$.

b) $a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1}$.

c) $\begin{cases} a_{n+1} = \alpha b_n \\ b_{n+1} = \beta a_n. \end{cases}$

Problema 4.

Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$f(x) = |x - 1|\, g(x).$$

a) Dacă g este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$ este f derivabilă pe $\mathbb{R}$?

b) Ce condiţie suplimentară ar trebui să satisfacă g ca f să fie derivabilă?

c) Pentru

$$g(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

să se traseze graficul funcţiei f.

Probleme de antrenament - Setul 4

1. Arătați că $1 \cdot 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^2 + ... + (n-1) \cdot n \cdot C_n^n = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 2.$

2. Calculați $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ pentru $n \in \mathbf{N}, \quad n \geq 1.$

3. Demonstrați că $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}, \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$

4. Calculați $\lim_{x \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e} \right) \cdot x$.

5. Demonstrați că:

   a) $e^x > \frac{1}{1+x}, \quad \forall x > 0;$

   b) $e^x > 1 + \ln(1+x), \quad \forall x > 0$

   c) $e^x > 1 + (1+x) \cdot \ln(1+x), \quad \forall x > 0.$

6. Calculați suma $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}$ pentru $n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$