Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătaţi că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Soluţie

Deoarece a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $-a+b+c$, $a-b+c$ şi $a+b-c$ sunt strict pozitive. Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică avem

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}=\sqrt{1\cdot\frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1+\frac{a}{-a+b+c}}=\frac{2a}{b+c}$$

şi analoagele **3p**

Este suficient să demonstrăm că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Notând $b+c=x$, $a+c=y$, $b+c=z$, obţinem $a=\frac{-x+y+z}{2}$, $b=\frac{x-y+z}{2}$ şi $c=\frac{x+y-z}{2}$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$$\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1 \geq 3$$

care este adevărată, deoarece $u+\frac{1}{u} \geq 2$, pentru orice $u>0$ **4p**

Problema 2. Pentru orice număr natural a definim mulţimea

$$A_a=\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{n^2+an} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Arătaţi că mulţimea A_a este finită dacă şi numai dacă $a \neq 0$.
b) Determinaţi cel mai mare element al mulţimii A_{40}.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) Dacă $a=0$ atunci $A=\mathbb{N}$, care este infinită **1p**

Dacă $a \neq 0$ atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2+an=p^2$ **1p**

Obţinem $4n^2+4an+a^2=4p^2+a^2$, de unde $(2n+a-2p)(2n+a+2p)=a^2$ **1p**

Ca urmare, $2n+a+2p$ este divizor al lui a^2 (care este nenul), deci $2n<2n+a+2p \leq a^2$, de unde rezultă că n poate lua un număr finit de valori, adică A este finită **2p**

b) Trebuie să găsim cel mai mare număr natural n pentru care n^2+40n este pătrat perfect. Fie $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2=n^2+40n$.

Obţinem $p^2+400=(n+20)^2$, de unde $(n+20-p)(n+20+p)=400$. Numerele $p-n-20$ şi $p+n+20$ au aceeaşi paritate, deci vor fi pare. Avem $2\cdot 200=4\cdot 100=8\cdot 50=400$, de unde $n \in \{81, 32, 9\}$. Elementul căutat este 81. .... **2p**

Problema 3. Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\;\middle|\;\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}\right\}.$$

Soluţie Fie $(x,y)\in M$. Cum $\sqrt{2016}=12\sqrt{14}$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{12\sqrt{14}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{14x}}-\frac{1}{\sqrt{14y}}=\frac{1}{2016}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{14x}}=\frac{1}{\sqrt{14y}}+\frac{1}{2016}.$$

Prin ridicare la pătrat obţinem $\frac{1}{14x}=\frac{1}{14y}+\frac{1}{2016}+\frac{1}{1008\sqrt{14y}}$, de unde $\sqrt{14y}\in\mathbb{Q}$ şi, ca urmare $\sqrt{14x}\in\mathbb{Q}$.

Atunci există numerele naturale nenule a,b pentru care $x=14a$ şi $y=14b$. **3p**

Înlocuind în relaţia $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{12\sqrt{14}}$, obţinem $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{12}$, de unde $a=\frac{12b}{b+12}$. **2p**

Din $\frac{12b}{b+12}\in\mathbb{N}$ rezultă $b+12\mid 144$, deci $b\in\{4,6,12,24,36,60,132\}$, de unde $a\in\{3,4,6,8,9,10,11\}$.

În concluzie, mulţimea M admite 7 elemente. **2p**

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic şi $AB'\cap A'B=\{O\}$. Pe muchia $[BC]$ se consideră un punct N astfel încât $A'C\parallel(B'AN)$. Ştiind că $D'O\perp(B'AN)$ demonstraţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Soluţie

Din $D'A'\perp(ABB')$ şi $D'O\perp AB'$ obţinem $A'O\perp AB'$, deci $ABB'A'$ este pătrat. **2p**

Apoi $A'C\parallel(ANB')$ şi $(ANB')\cap(A'BC)=ON$, deci $A'C\parallel ON$. Cum O este mijlocul segmentului $[A'B]$ atunci N este mijlocul segmentului $[BC]$. **1p**

În dreptunghiul $A'BCD'$, avem $m(\sphericalangle D'ON)=90°$, de unde $\Delta D'A'O\sim\Delta OBN$. Atunci $\frac{D'A'}{A'O}=\frac{OB}{ON}$, ceea ce conduce la $\frac{A'B^2}{4}=\frac{A'D'^2}{2}$, deci $A'B=A'D\sqrt{2}$. Obţinem $A'D=A'A$, deci $AA'D'D$ este pătrat. **3p**

Concluzia se obţine remarcând că $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipided dreptunghic cu toate feţele laterale pătrate, deci este cub. **1p**