Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015

CLASA a IX-a
Soluţii

Problema 1. Se consideră paralelogramul $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în O. Bisectoarele unghiurilor DAC şi DBC se intersectează în T. Se ştie că $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TO}$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABT.

Soluţie.
Din ipoteză rezultă că $DOCT$ este paralelogram **2p**
Din $AO \parallel DT$ deducem $\angle DTA \equiv \angle OAT \equiv \angle DAT$, deci $DA = DT$ **2p**
Astfel $DA = DT = OC$; analog $BC = CT = OD$, de unde $BD = AC$. Astfel $ABCD$ este dreptunghi, $AOTD$ este romb, triunghiul AOD este echilateral şi triunghiul ABT este echilateral, deci are unghiurile de 60° **3p**

Problema 2. Determinaţi numerele reale a şi b pentru care egalitatea

$$[ax + by] + [bx + ay] = (a + b)[x + y]$$

este adevărată oricare ar fi numerele reale x şi y (unde $[t]$ desemnează partea întreagă a numărului real t).

Soluţie.
Pentru $y = -x$ şi $d = a - b$ obţinem $[dx] + [-dx] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*) **1p**
Dacă $d \neq 0$, atunci (*) este falsă pentru $x = 1/(2d)$, deci $d = 0$ **2p**
Apoi, pentru $x + y = 1$ avem $2[a] = 2a$, deci a este întreg **1p**
Dacă $a = 0$ relaţia se verifică, deci o soluţie este $a = b = 0$ **1p**
Dacă $a \neq 0$, în relaţia $2a[x + y] = 2[a(x + y)] \leq 2a(x + y)$ luăm $x + y = 1/2$ şi obţinem $a \geq 0$, deci $a \geq 1$ **1p**
Pentru $x + y = 1/a$ obţinem $1 = a\,[1/a]$, ceea ce conduce la $a = b = 1$, care este cea de-a doua soluţie **1p**

Problema 3. Fie m şi n numere naturale, cu $m \geq 2$ şi $n \geq 3$. Demonstraţi că există m numere naturale nenule distincte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, toate divizibile cu $n - 1$, astfel încât

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{a_m}.$$

Gazeta Matematică

Soluţia 1.
Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică având raţia $q = n - 1$, atunci
$\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \ldots + (-1)^{p-1}\dfrac{1}{a_p} = \dfrac{1/a_1 + 1/q \cdot (-1)^{p-1} 1/a_p}{1 + 1/q}, \forall p \in \mathbb{N}^*$ **3p**
Relaţia precedentă se scrie
$\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \ldots + (-1)^{p-1}\dfrac{1}{a_p} = \dfrac{n-1}{na_1} + \dfrac{(-1)^{p-1}}{na_p}$ **2p**

Pentru $a_1 = n-1$, $m = p+1$ şi $a_m = na_p$ obţinem numerele cerute **2p**

Soluţia 2.

Demonstrăm prin inducţie după m **1p**

Pentru $m = 2$ concluzia se verifică: $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n(n-1)}$ **2p**

Astfel, $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{b_1} - \dfrac{1}{b_2}\right)$, cu $b_1 < b_2 - 1$. Apoi, dacă

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)b_1} - \frac{1}{(n-1)b_2} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(n-1)b_m},$$

cu $1 \leq b_1 < \ldots < b_m$ numere întregi şi $b_{m-1} < b_m - 1$, atunci punem $b'_i = b_i$, $i = \overline{1, m-1}$, $b'_m = b_m - 1$, $b'_{m+1} = b_m(b_m - 1)$ şi obţinem

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)b'_1} - \frac{1}{(n-1)b'_2} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{(n-1)b'_m} + (-1)^m\frac{1}{(n-1)b'_{m+1}},$$

cu $1 \leq b'_1 < \ldots < b'_m < b'_{m+1}$ numere întregi şi $b'_m < b'_{m+1} - 1$ **4p**

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care verifică relaţia

$$d(x, f(y)) \cdot m(f(x), y) = d(x, y) \cdot m(f(x), f(y)), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{N}^*,$$

unde $d(a, b)$ şi $m(a, b)$ desemnează cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a şi b.

Soluţie.

Pentru $x = 1$ avem $m(a, y) = m(a, f(y)), \forall y \in \mathbb{N}^*$, unde $a = f(1)$ **1p**

Cu alegerea $y = 1$ rezultă $d(x, a)f(x) = m(a, f(x)), \forall x \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Rezultă $d(x, a)f(x) = m(x, a), \forall x \in \mathbb{N}^*$ (*) **1p**

Din relaţia (*) $af(a) = a$, deci $f(a) = 1$; de asemenea $af(a^2) = a^2$, deci $f(a^2) = a$ **1p**

Ipoteza duce, pentru $x = a^2$ şi $y = a$, la $1 \cdot a = a \cdot f(a^2)$, de unde obţinem $a = f(a^2) = 1$ **1p**

Din (*) rezultă $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Funcţia identică verifică **1p**