Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 martie 2015
CLASA a X-a
Soluţii şi barem de notare

Problema 1. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq \frac{n-1}{2n+2}.$$

.... *Gazeta Matematică*

Soluţie. Demonstrăm inegalitatea prin inducţie. În cazul $n = 2$ avem egalitate .... (1 p)

Să observăm că, la pasul de inducţie, în trecerea de la $n-1$ la n, membrul drept creşte cu

$$\frac{n-1}{2n+2} - \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

deci e suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geq \frac{1}{n\,(n+1)},$$

.... (2p)

ceea ce rezultă imediat prin înmulţirea inegalităţilor

$$k\,(2n-k+1) \leq n\,(n+1)\,,$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. .... (4p)

Problema 2. Să se determine numerele întregi x, y, pentru care

$$5^x - \log_2(y+3) = 3^y \text{ şi } 5^y - \log_2(x+3) = 3^x.$$

Soluţie. Scăzând egalităţile, se obţine

$$5^x + 3^x + \log_2(x+3) = 5^y + 3^y + \log_2(y+3)\,.$$

.... (1p)

Cum funcţia $f(t) = 5^t + 3^t + \log_2(t+3)$ este strict crescătoare, rezultă $x = y$. .... (2p)

Pentru rezolvarea în Z a ecuaţiei

$$5^x = 3^x + \log_2(x+3)\,,$$

se observă că $x \in \{-2, -1, 0\}$ nu verifică, iar $x = 1$ este soluţie. .... (1p)

Pentru $x \geq 2$, se arată că

$$5^x \geq 3^x + 4^x,$$

folosind monotonia funcţiei $g(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$, ... (1p)

iar apoi se demonstrează prin inducţie matematică inegalitatea

$$4^x > \log_2(x+3)\,.$$

.... (2p)

Problema 3. Să se determine numerele complexe z pentru care are loc relaţia

$$|z| + |z - 5i| = |z - 2i| + |z - 3i|.$$

Soluţie. Avem

$$|z - 2i| = \left|\frac{2}{5}(z - 5i) + \frac{3}{5}z\right| \leq \frac{2}{5}|z - 5i| + \frac{3}{5}|z|.$$

.... (3p)

Analog

$$|z - 3i| = \left|\frac{3}{5}(z - 5i) + \frac{2}{5}z\right| \leq \frac{3}{5}|z - 5i| + \frac{2}{5}|z|,$$

de unde

$$|z| + |z - 5i| \geq |z - 2i| + |z - 3i|.$$

.... (1p)

Egalitatea are loc atunci când există $\lambda \geq 0$ astfel ca $z - 5i = \lambda z$, de unde deducem că $z = ai$, cu $a \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$. (3p)

Problema 4. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie neconstantă care are proprietatea

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)},$$

pentru orice $x, y > 0$. Să se arate că

$$f(xy) = f(x) f(y) \text{ şi } f(x + y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y > 0$.

Soluţie. Fie $a > 0$ astfel ca $f(a) \neq 1$. Avem, pentru x, y arbitrari,

$$f(a^{xy}) = f(a)^{f(xy)},$$

dar

$$f(a^{xy}) = f((a^x)^y) = f(a^x)^{f(y)} = \left(f(a)^{f(x)}\right)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)},$$

de unde $f(xy) = f(x) f(y)$ .... (3p)

Apoi

$$f\left(a^{x+y}\right) = f(a)^{f(x+y)},$$

dar

$$f\left(a^{x+y}\right) = f(a^x a^y) = f(a^x) f(a^y) = f(a)^{f(x)} f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)},$$

deci $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .... (4p)

Observaţie. Se poate arăta că singura funcţie neconstantă care verifică condiţia din enunţ este identitatea.