Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 14 Martie 2015

CLASA a XI-a
Soluţii şi bareme

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie cu proprietatea că pentru oricare $y \in [0, 1]$ şi oricare $\varepsilon > 0$ există $x \in [0, 1]$ astfel încât $|f(x) - y| < \varepsilon$.
a) Demonstraţi că dacă f este continuă pe $[0, 1]$ atunci f este surjectivă.
b) Daţi un exemplu de funcţie f cu proprietatea din enunţ, care să nu fie surjectivă.

Soluţie.

a) Considerăm o funcţie continuă $f : [0, 1] \to [0, 1]$ având proprietatea din enunţ. Fie $y \in [0, 1]$. Din ipoteză deducem că există un şir $(x_n)_{n\geq1}$, cu termenii în $[0, 1]$, astfel încât $|f(x_n) - y| < 1/n$, $\forall n \geq 1$. (**2 puncte**)
Şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este mărginit, deci admite un subşir convergent $(x_{i_n})_{n\geq1}$, cu $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} \in [0, 1]$. (**1 punct**)
Prin trecere la limită în inegalitatea $|f(x_{i_n}) - y| < 1/i_n$, $\forall n \geq 1$, obţinem (pe baza continuităţii lui f în punctul x) $|f(x) - y| \leq 0$, deci $f(x) = y$. Rezultă că f este surjectivă. (**1 punct**)

b) Definim funcţia $f : [0, 1] \to [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} . \quad (\textbf{2 puncte})$$

$f([0, 1]) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, deci f nu este surjectivă.
Avem $|f(y) - y| = 0$, $\forall y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Pentru $y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ şi $\varepsilon > 0$, există $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ astfel ca $|x - y| < \varepsilon$, sau $|f(x) - y| < \varepsilon$. (**1 punct**)

Problema 2. Fie două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A-B)^2 = O_2$.
a) Arătaţi că $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$.
b) Demonstraţi că $\det(AB - BA) = 0$ dacă şi numai dacă $\det(A) = \det(B)$.

Soluţie.

a) Din $(A - B)^2 = O_2$ obţinem $\det(A - B) = 0$. (**1 punct**)
De asemenea, deducem $Tr(A-B) = 0$, deci $Tr(A) = Tr(B) =: a$. (**1 punct**)
Notăm $b = \det(A) - \det(B)$. Conform relaţiei lui Cayley, avem

$$\begin{cases} A^2 - aA + \det(A)I_2 = O_2 \\ B^2 - aB + \det(B)I_2 = O_2 \end{cases} ,$$

de unde $\det(A^2 - B^2) = \det(a(A - B) - bI_2)$. (**1 punct**)
Dar $\det(a(A - B) - bI_2) = a^2 \det(A - B) - abTr(A - B) + b^2 = b^2$.
Rezultă $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$. (**1 punct**)

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \det\left(A^2 - B^2 + x(AB - BA)\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia f se poate reprezenta sub forma

$$f(x) = \det\left(A^2 - B^2\right) + cx + \det(AB - BA)x^2, \ x \in \mathbb{R},$$

unde c este o constantă reală. (**1 punct**)
Din $f(1) = f(-1) = \det(A - B)\det(A + B) = 0$ obţinem $c = 0$ şi

$$\det\left(A^2 - B^2\right) + \det(AB - BA) = 0. \quad (\mathbf{1\ punct})$$

Atunci, conform a), $(\det(A) - \det(B))^2 = -\det(AB - BA)$, de unde concluzia. (**1 punct**)

Problema 3. Determinaţi toate numerele naturale $k \geq 1$ şi $n \geq 2$ cu proprietatea că există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ şi $A^k B + BA = I_n$.

Soluţie. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ şi $A^k B + BA = I_n$.

Dacă $k \geq 3$, atunci $BA = I_n$ (deoarece $A^k = O_n$), deci A este inversabilă, în contradicţie cu $A^3 = O_n$. (**1 punct**)

Dacă $k = 2$ atunci din $A^2 B + BA = I_n$, prin înmulţire la stânga cu A şi apoi la dreapta cu A^2, rezultă $ABA = A$ şi $A^2 BA^2 = A^2$. Scriind ultima egalitate sub forma $A(ABA)A = A^2$, obţinem $A^3 = A^2$, deci $A^2 = O_n$. Atunci $BA = I_n$, în contradicţie cu $A^3 = O_n$. (**1 punct**)

Prin urmare, dacă există k şi n ca în enunţ, atunci $k = 1$. Din $Tr(AB) = Tr(BA) \in \mathbb{Z}$ şi $AB + BA = I_n$ rezultă $2Tr(AB) = n$, deci n este un număr natural par. (**1 punct**)

Arătăm în continuare că, pentru orice număr natural par $n \geq 2$, există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ şi $AB + BA = I_n$.

Pentru $n = 2$, putem alege matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, care satisfac condiţiile $AB + BA = I_2$ şi $A^2 = B^2 = O_2$. (**2 puncte**)

Pentru $n = 2k$, cu $k \geq 2$, matricele bloc diagonale A şi B, de dimensiune $2k$, care au pe diagonala principală k matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi respectiv k matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar restul coeficienţilor nuli, satisfac relaţiile $AB + BA = I_n$ şi $A^2 = B^2 = O_n$. (**2 puncte**)

Problema 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale din intervalul $[1, \infty)$. Presupunem că şirul $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n^{(k)} = \left[x_n^k\right]$, $n \geq 1$, este convergent pentru oricare $k \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. (Prin $[a]$ se notează partea întreagă a numărului real a.)

Soluţie. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$ este un şir convergent de numere naturale nenule. Atunci există $n_k, a_k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n^{(k)} = a_k,\ \forall n \geq n_k$. Ca urmare, $x_n^k \in [a_k, a_k + 1),\ \forall n \geq n_k$. (**2 puncte**)
În particular, $x_n \in [a_1, a_1 + 1),\ \forall n \geq n_1$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. (**1 punct**)
Presupunem, prin reducere la absurd, că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ admite două puncte

limită a şi b, cu $1 \leq a < b$. Atunci există două subşiruri $(x_{i_n})_{n\geq 1}$ şi $(x_{j_n})_{n\geq 1}$ ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i_n} = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{j_n} = b$.
Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $i_n, j_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $x_{i_n}^k, x_{j_n}^k \in [a_k, a_k + 1)$, $\forall n \geq n_k$. Rezultă $x_{j_n}^k - x_{i_n}^k < 1$, $\forall n \geq n_k$. Prin trecere la limită $(n \to \infty)$ obţinem $b^k - a^k \leq 1$. Prin urmare, $b^k - a^k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. (**2 puncte**)
Dar $1 \leq a < b$ implică $\lim\limits_{k\to\infty} \left(b^k - a^k\right) = \infty$, în contradicţie cu inegalitatea precedentă. În concluzie, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. (**2 puncte**)