

The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 2: Saturday, February 28, 2015, Bucharest

Language: Romanian

Problema 4. Fie ABC un triunghi și fie D punctul de contact al laturii BC cu cercul înscris în acest triunghi. Fie J_b , respectiv J_c , centrul cercului înscris în triunghiul ABD , respectiv ACD . Să se arate că centrul cercului circumscris triunghiului AJ_bJ_c este situat pe bisectoarea unghiului BAC .

Problema 5. Fie $p \geq 5$ un număr prim. Pentru un număr natural nenul k , fie $R(k)$ restul împărțirii lui k la p , unde $0 \leq R(k) \leq p - 1$. Să se determine numerele naturale nenule $a < p$, astfel încât, pentru fiecare $m = 1, 2, \dots, p - 1$,

$$m + R(ma) > a.$$

Problema 6. Dat fiind un număr natural nenul n , să se determine cel mai mare număr real μ care satisface următoarea condiție: oricare ar fi mulțimea C formată din $4n$ puncte situate în interiorul unui pătrat unitate U , există un dreptunghi T conținut în U , astfel încât

- laturile lui T sunt paralele cu laturile lui U ;
- interiorul lui T conține exact un punct din C ;
- aria lui T este cel puțin μ .

Fiecare dintre cele trei probleme este notată cu maximum 7 puncte.

Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.