The 7th Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, February 27, 2015, Bucharest

Language: Romanian

Problema 1. Există un şir infinit de numere întregi strict pozitive a_1, a_2, a_3, $\ldots$, astfel încât a_m şi a_n sunt coprime dacă şi numai dacă $|m-n|=1$?

Problema 2. Două persoane joacă următorul joc pe un poligon regulat cu n laturi, $n \geq 5$. Iniţial, sunt alese trei vârfuri consecutive şi pe fiecare dintre acestea este plasat câte un jeton. O mutare constă în deplasarea unui jeton de-a lungul unui număr oarecare de laturi, pentru a fi plasat într-un alt vârf, fără a sări peste vreun alt jeton. O mutare este *admisibilă*, dacă, după efectuarea ei, aria triunghiului format de către cele trei jetoane este strict mai mare dacât era înainte. Cele două persoane fac pe rând câte o mutare admisibilă, iar cea care nu mai poate face o astfel de mutare pierde. Pentru ce valori ale lui n, persoana care face prima mutare are o strategie câştigătoare?

Problema 3. Pe o tablă este scrisă o listă finită de numere raţionale. O *operaţie* constă în alegerea oricăror două dintre aceste numere, a şi b, ştergerea lor de pe listă şi înlocuirea acestora cu unul dintre numerele

$$a+b, \quad a-b, \quad b-a, \quad a \times b, \quad a/b \ \text{(dacă } b \neq 0\text{)}, \quad b/a \ \text{(dacă } a \neq 0\text{)}.$$

Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg $n > 100$, există un număr finit de numere întregi $k \geq 0$, astfel încât, pornind de la lista

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

după $n-1$ operaţii, să fie obţinută valoarea $n!$.

Fiecare dintre cele trei probleme este notată cu maximum 7 puncte.
Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.