OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 28 februarie 2015
Clasa a VIII-a
Barem de corectare

1. Se dau numerele $a=\sqrt{1+3+5+7+9+11}-\sqrt{1+3+5+7+9}$, $b=\sqrt{1+3+5+...+4029}$ şi $c=\sqrt{1+3+5+...+4027}$. Să se calculeze:

a) a^{2015}

b) $(b-c)^{2015}$

c) $(b+c)^{a-1}$

Soluţie:

a) $1+3+5+7+9+11=1+2+3+4+...+11-(2+4+...+10)$ $=\frac{11\cdot 12}{2}-2\cdot\frac{5\cdot 6}{2}=6^2$, ……………1p

$1+3+5+7+9=1+2+3+4+...+9-(2+4+...+8)=5^2$, $a=\sqrt{6^2}-\sqrt{5^2}=6-5=1$……………1p

$a^{2015}=1^{2015}=1$ ………………………………………………………………………..1p

b) folosind a) obţinem $1+3+5+...+4029=1+2+3+4+...+4029-(2+4+...+4028)=2015^2$, deci

$b=\sqrt{2015^2}=2015$ ……………………………………………………………1p

analog $c=\sqrt{2014^2}=2014$ ……………………………………………………1p

$(b-c)^{2015}=1^{2015}=1$ ……………………………………………………………1p

c) $(b+c)^{a-1}=4029^0=1$ ……………………………………………………………..1p

2. Determinaţi numerele reale x, y, z pentru care

$$x+y+z-21=2\sqrt{x-4}+4\sqrt{y-9}+6\sqrt{z-22}.$$

Soluţie:

căutăm pătratele perfecte care conţin cei trei radicali

$(x-4)-2\sqrt{x-4}+1=(\sqrt{x-4}-1)^2$ ……………………………………………………1p

$(y-9)-2\cdot 2\sqrt{y-9}+4=(\sqrt{y-9}-2)^2$ ……………………………………………..…………1p

$(z-22)-2\cdot 3\sqrt{z-22}+9=(\sqrt{z-22}-3)^2$ ………………………………….….………1p

$-4+1-9+4-22+9=-21$, obţinem sumă de pătrate perfecte egală cu zero $\Leftrightarrow$ fiecare pătrat este egal cu zero……………..……………………………………………………………………1p

$\Rightarrow$ $\sqrt{x-4}=1$, $\sqrt{y-9}=2$, $\sqrt{z-22}=3$ ……………………………………………1p

$\Rightarrow$ $x-4=1$, $y-9=4$, $z-22=9$ ……………………………….……………………1p

$\Rightarrow$ $x=5$, $y=13$, $z=31$ ……………………………………………………………..1p

3. Fie trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD = DC = a\sqrt{2}$ şi $BC = AC = 2a$. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara în D pe care se ia punctul M astfel încât $MD = a\sqrt{3}$. Să se calculeze:

a) distanţa de la punctul M la AB;
b) aria triunghiului MAB;
c) distanţa de la punctul M la AC;
d) măsura unghiului dintre planele (MAC) şi (ABC).

Soluţie:

a) în ΔADC aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora şi obţinem triunghi dreptunghic în D, deci trapezul este dreptunghic ………………………………………………………………..…….1p

din teorema celor trei perpendiculare obţinem $d(M, AB) = MA$, $MA = a\sqrt{5}$ ………………...…....1p

b) fie $CE \perp AB$, $E \in [AB]$; obţinem cu teorema lui Pitagora $BE = a\sqrt{2}$, deci $AB = 2a\sqrt{2}$ ……..1p

ΔMAB este dreptunghic, obţinem $A = a^2\sqrt{10}$ ……………………………………………………..1p

c) fie $DP \perp AC$, $P \in [AC]$, $AECD$ pătrat $\Rightarrow DP = a$ …………………………………………1p

din teorema celor trei perpendiculare obţinem $d(M, AC) = MP$, $MP = 2a$ ………………………1p

d) unghiul căutat este $\sphericalangle MPD$, $\sin(\sphericalangle MPD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\sphericalangle MPD) = 60^0$ ………………………1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistriţa, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro