OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-28.02.2015
Clasa a V-a
Barem de corectare

1. **La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obținut 118 puncte ?**

<u>Soluţie şi Barem de corectare:</u>

Presupunem că elevul a răspuns corect la toate întrebările
……………………………………..1p

a) Câte puncte ar fi obținut presupunerii?
$30 \cdot 5 = 150$ de puncte
………………………………………………………………..1p
b) Care este diferența dintre punctajul obținut și cel real?
$150 - 118 = 32$ de puncte
…………………………………………………………...1p
c) Care este plusul de puncte acordat pentru un răspuns greșit?
$3 + 5 = 8$ puncte
…………………………………………………………………..1p
d) Care este numărul de răspunsuri greșite?
$32 : 8 = 4$ răspunsuri greșite
…………………………………………………………...1p
e) Care este numărul de răspunsuri corecte?
$30 - 4 = 26$
……………………………………………………………………1p
Verificare : $26 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 130 - 12 = 118$ puncte
………………………………..1p

2. **Se consideră 5 numere naturale cu media aritmetică egală cu 24. Împărțind pe rând primul număr la suma dintre al doilea și al treilea, apoi al doilea număr la suma dintre al treilea și al patrulea, iar la final pe al treilea la suma dintre al patrulea și al cincilea se obține de fiecare dată câtul 2 și restul 1. Știind că ultimele două numere sunt consecutive, aflați numerele.**

<u>Soluţie şi Barem de corectare:</u>

Notăm primul număr cu "x" , al doilea număr cu "y" , al treilea cu "z" , al patrulea cu "t", al cincilea cu "u".
Avem $x + y + z + t + u =$
120..(0,5p)
$x : (y + z) = 2 \ rest \ 1$; $y : (z + t) = 2 \ rest \ 1$; $z : (t + u) = 2 \ rest \ 1$.
............................(1p)
Folosim Teorema împărțirii cu rest: $D = Î \cdot C + R,\ 0 \le R < Î$

$x = 2 \cdot (y + z) + 1,\ y = 2 \cdot (z + t) + 1,\ z = 2 \cdot (t + u) + 1,\ u = t + 1$.............................(1p)

$z = 2 \cdot (t + t + 1) + 1 = 2 \cdot (2t + 1) + 1 = 4t + 3 \Rightarrow z = 4t + 3$ ....(0,5p)

$y = 2z + 2t + 1 = 2 \cdot (4t + 3) + 2t + 1 = 10t + 7 \Rightarrow y = 10t + 7$.................................(0,5p)

$x = 2y + 2z + 1 = 2 \cdot (10t + 7) + 2z + 1 = 20t + 15 + 2z \Rightarrow x = 20t + 2 \cdot (4t + 3) + 15 = 20t + 8t + 6 + 15 = 28t + 21 \Rightarrow x = 28t + 21$..(0,5p)

$x + y + z + t + u = 120 \Leftrightarrow 28t + 21 + 10t + 7 + 4t + 3 + t + t + 1 = 120$..................(0,5p)

$44t + 32 = 120 \Leftrightarrow 44t = 120 - 32 \Leftrightarrow 44t = 88 \Leftrightarrow t = 2$..(0,5p)

$u = t + 1 \Rightarrow u = 3; z = 4t + 3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11 \Rightarrow z = 11$..(1p)

$y = 10t + 7 = 10 \cdot 2 + 7 = 27 \Rightarrow y = 27; x = 28t + 21 = 56 + 21 = 77 \Rightarrow x = 77$……..(1p)

3. **Se dau mulțimile $\boldsymbol{A, B, C, D}$ cu proprietatea că sunt disjuncte oricare două între ele, oricare trei între ele și toate patru, astfel încât $\boldsymbol{card\ A = a^{5n+3}, card\ B = a^{5n+2}, card\ C = a^{5n+1}, card\ D = a^{5n},\ a, n \in N^*}$. Să se demonstreze că $\boldsymbol{card\ (A \cup B \cup C \cup D) + 4}$ este număr par.**

<u>Soluție și Barem de corectare:</u>

Deoarece $A \cap B = \emptyset,\ A \cap C = \emptyset,\ A \cap D = \emptyset,\ B \cap C = \emptyset,\ B \cap D = \emptyset,\ C \cap D = \emptyset,\ A \cap B \cap C = \emptyset,\ A \cap B \cap D = \emptyset,\ A \cap C \cap D = \emptyset,\ B \cap C \cap D = \emptyset,\ A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$ ....(2p)

Rezultă: $card(A \cup B \cup C \cup D) = card\ A + card\ B + card\ C + card\ D = a^{5n+3} + a^{5n+2} + a^{5n+1} + a^{5n} = a^{5n+2} \cdot (a + 1) + a^{5n} \cdot (a + 1) = (a + 1)(a^{5n+2} + a^{5n}) = (a + 1) \cdot a^{5n} \cdot (a^2 + 1) = a(a + 1) \cdot a^{5n-1} \cdot (a^2 + 1) = par,\ pentru$ că $a(a + 1) este\ număr\ par$.........(4p)

Rezultă că, $card(A \cup B \cup C \cup D) + 4\ \ este\ număr\ par$...(1p)